cantoneiras. Para a cantoneira a bolbo ⌐ 200 × × 25 × 12 encontrámos:

$$N = 0{,}0583 \qquad Z = 2{,}88 \qquad \mu_{(z)} = 0{,}455$$

$$m_1 = \nu_{(z)} \cdot M_o \cdot \left(\frac{N_o}{N}\right)^{1/2} = 0{,}141$$

$$l_1 = b \cdot \frac{1 + m_1}{m_1} = 606 \text{ mm.}$$

$$X_s^I = X_s \cdot \frac{N}{N_o} = 2{,}50$$

A *percentagem de peso a mais* do peso mínimo relativo a $X_s^I = 2{,}50$ resultará:

$$\delta \pi = 12{,}3\ \%$$

Para, numa última análise, podermos decidir sobre a melhor resolução, ocorreria confrontar os produtos:

$$1{,}056\ X_s^I (1 + \delta \pi) = X_s^I \cdot C_1 (z) \cdot [1 + f (m_1 Z)]$$

para as ternas de valores X_s^I, Z, m_1 dos dois casos, escolhendo a solução que dá o valor menor de tal produto.

3.º Caso

Pelo que respeita às primeiras determinações que deram para X_s^I valores sensìvelmente superiores àqueles de projecto pode resultar mais conveniente uma estrutura que com uma cantoneira mais leve e uma maior distância entre balizas, faça trabalhar o material segundo o coeficiente de segurança dado, isto é: $X_s = 2{,}30$.

Se prolongarmos a recta:

$$N_o = 0{,}05365$$

até encontrar a mais próxima das curvas Π (z) à direita das curvas dos casos procedentes, encontramos que para a cantoneira ⌐ 180 × 75 × 8 teríamos:

$$Z = 3{,}70 \qquad \mu_{(z)} = 0{,}335$$

e portanto:

$$m_1 = \mu_{(z)} \cdot M_o = 0{,}1086$$

a que corresponde um:

$$\delta \pi = 18{,}3\ \%$$

Para o dito valor resulta:

$$C_{1\,(z)} = 0{,}93$$

e portanto:

$$s = 20{,}7 \text{ mm}$$
$$l_1 = 764 \text{ mm}$$

Torna-se imediatamente evidente que entre todas as soluções precedentemente encontradas esta é a melhor. De facto, calculando as expressões.

$$X_s^I \cdot C_1 (z) \cdot [1 + f (m_1 Z)]$$

(que dão o valor do peso unitário da estrutura a menos do factor:

$$\frac{2 \cdot 3{,}4}{3} \cdot \frac{p}{K} \cdot \frac{\gamma f}{\gamma a}\Big)$$

encontraremos que este *3.º caso* é aquele que dá o *valor mais baixo.*

Exemplo n.º 2

Deseja-se proporcionar a estrutura do casco resistente de um submarino sendo conhecidos como elementos de projecto:

— Raio externo . . . . . $R = 2800$ mm
— Pressão máxima . . . . . $p = 10$ kg/cm²
— Grau de segurança . . . . . $X_s = 2{,}5$
— Carga limite de elasticidade $K_s = 4200$ kg/cm²

Como no exemplo precedente, examinaremos os três casos, isto é, suporemos em primeiro lugar que conhecemos a distância entre as balizas, depois suporemos conhecidas a espessura do invólucro e a cantoneira das balizas e, por último, consideraremos a hipótese que se deseja obter o X_s de projecto sem ter, portanto, como em outros casos, um valor dele superior ao dado.

1.º caso

Temos:

$$l_1 = 500 \text{ mm}$$

As cantoneiras — continuando a considerar o mesmo campo do Manual — terão $b = 75$ mm e, portanto:

$$m = \frac{b}{l_1} = \frac{75}{500} = 0{,}15$$

$$m_1 = \frac{m}{1-m} = \frac{0,15}{0,85} = 0,1765$$

$$M_o = \frac{b}{R} \cdot \left(\frac{K_s}{X_s\, p}\right)^{1/2} = 0,347$$

$$\mu_o\,(z) = \frac{m_1}{M_o} = 0,509$$

$$N_o = \lambda_o\,(z) = \frac{X_s\, p}{K_s} \cdot \left(\frac{R}{R_o}\right)^2 = 0,0467$$

Para o valor dado de μ_o (z) do diagrama teremos:

$Z_0 = 2,626$ $\qquad$ $N_1 = 0,05525$

$\Delta Z = 0,584$ $\qquad$ $\Delta N = 0,00855$

$\mu_1\,(z) = \mu_o\,(z) \left(\frac{N_1}{N_0}\right)^{1/2} = 0,554$ $\qquad$ $\Delta_1 Z = 0,168$

$\alpha = \frac{\Delta_1 Z}{\Delta_1 Z + \Delta Z} = 0,2233$ $\qquad$ $Z = Z_o - \alpha \Delta Z = 2,4955$

$N = 0,05325$ $\qquad$ $X_s^1 = X_s \frac{N}{N_o} = 2,85$

A cantoneira adoptada é aquela a bolbo ⌐ 200 × 75 × 12.

A espessura do invólucro resultará:

$$s = \frac{3,4}{3} \cdot \left(\frac{R_o}{R}\right)^2 N.\,R.\,C_1\,(z) = 16,66 \text{ mm.}$$

sendo:

$$C_1\,(z) = 0,773$$

A *percentagem de peso a mais* é de 9,6 %.

2.º Caso

A espessura escolhida foi:

$$s = 16 \text{ mm.}$$

Tracemos a hipérbole, que, como sabemos, é definida por:

$$NC_1\,(z) = K$$

cuja constante tem o valor:

$$K = \frac{3}{3,4} \cdot \frac{s}{R} \cdot \left(\frac{R}{R_o}\right)^2 = 0,03953$$

Para a cantoneira a bolbo ⌐ 200 × 75 × 9 encontramos:

$N = 0,0525$ $\qquad$ $Z = 2,34$

$$\mu\,(z) = 0,588$$

Portanto será:

$$m_1 = \mu\,(z) \,.\, M_o \,.\, \left(\frac{N_o}{N}\right)^{1/2} = 0,193$$

$$l_1 = b \,.\, \frac{1 + m_1}{m_1} = 464 \text{ mm}$$

$$X_s^1 = X_s \,.\, \frac{N}{N_o} = 2,81$$

O *peso a mais será, em percentagem,* de 9,3 %

Nota — Aconselhamos para um melhor esclarecimento ver as observações do exemplo precedente.

3.º caso

Prolonguemos a recta horizontal $N_o = 0,467$ e em correspondência da cantoneira a bolbo ⌐ 180 × 75 × 8 podemos ler:

$Z = 2,872$ $\qquad$ $\mu_{(z)} = 0,458$

Teremos portanto:

$$m_1 = \mu_{(z)} \,.\, M_o = 0,1592$$

$$l_1 = b \,.\, \frac{1 + m_1}{m_1} = 547 \text{ mm}$$

Para a espessura *s*, sempre calculada com a já conhecida fórmula, na qual temos $C_1\,(z) = 0,833$, obteremos:

$$s = 15,75 \text{ mm}$$

A *percentagem do peso a mais de peso mínimo* vale:

$$\delta\pi = 12,75\ \%$$

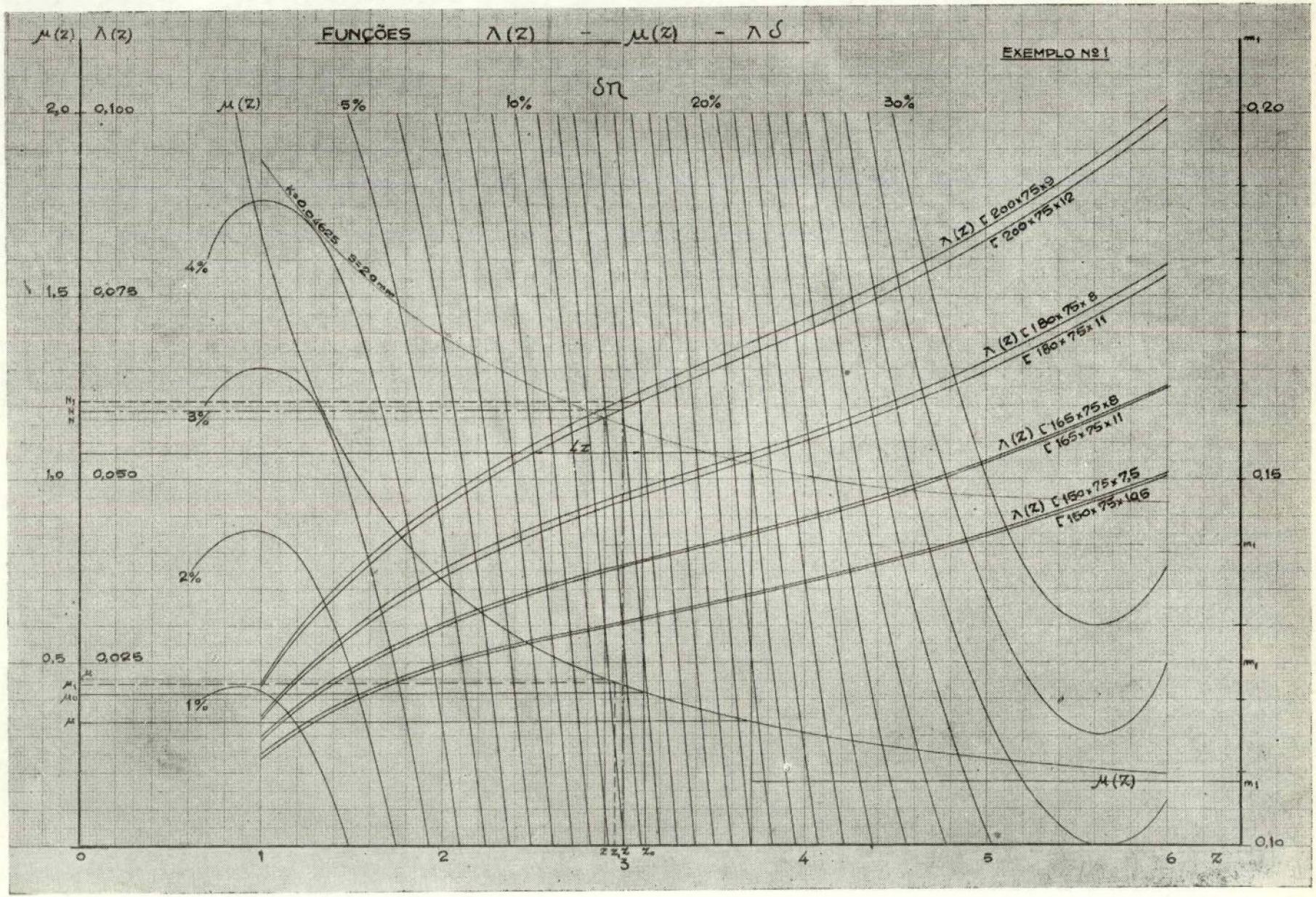
Também neste caso convém tomar atenção no último dimensionamento, para não chegarmos a limitações superiores a l_1.

* * *

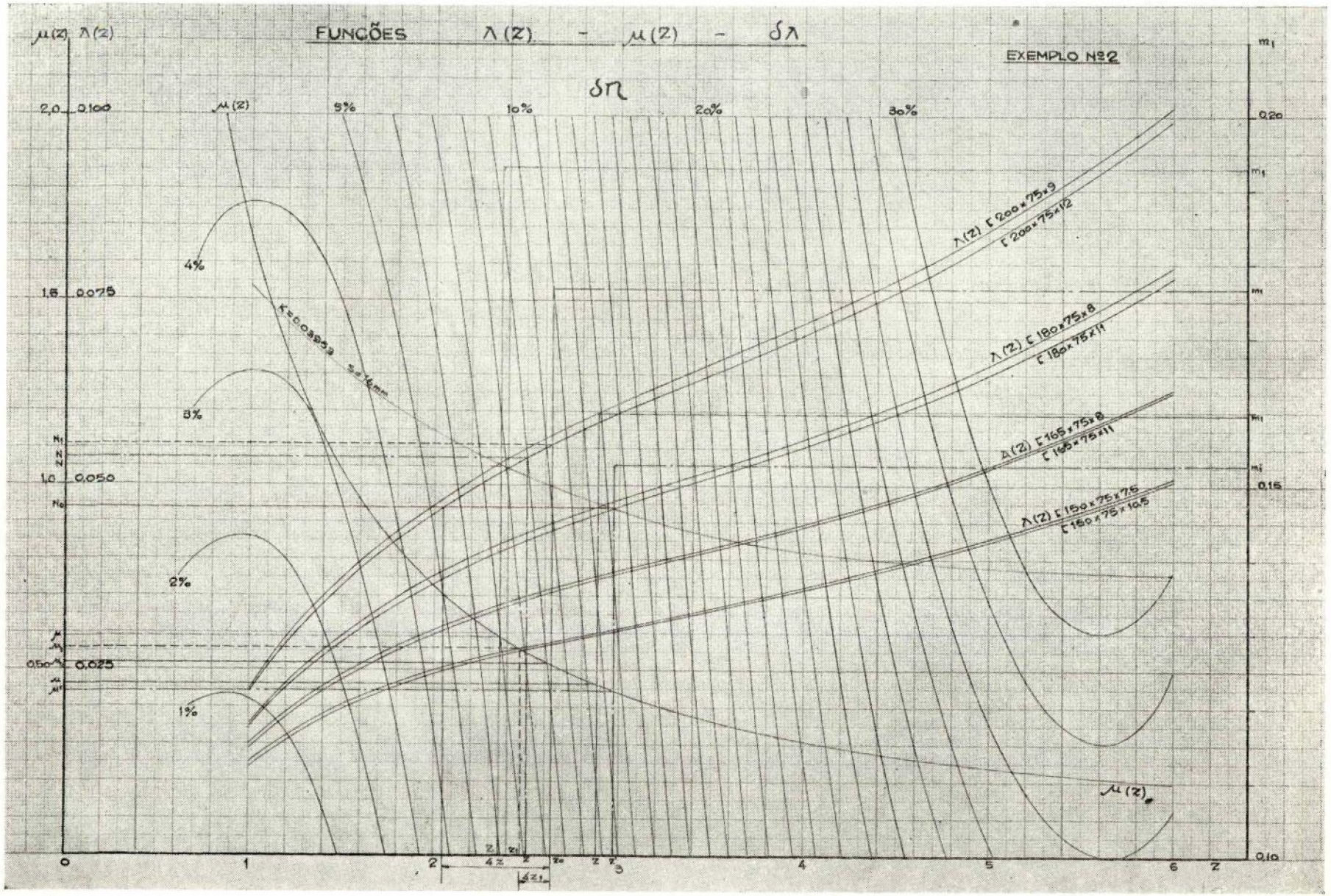
Ainda dentro do mesmo problema e do exame do seu diagrama, tendo em conta que a expessura da chapa comercial mais vizinha dos nossos resultados é s = 16 m, podemos ver qual será a solução definitiva a adoptar.

É de todo evidente que esta será dada pela cantoneira a bolbo ⌐ 180 × 75 × 11, sobre a curva da qual se encontram a recta $N_o = 0,0467$ e a curva $N = N_{(z)}$ (calculada para s = 16).

ABACO I


FUNÇÕES λ(Z) - μ(Z) - λδ
EXEMPLO Nº 1
μ(Z) λ(Z)
δn
5%
10%
20%
30%
4%
3%
2%
1%
λ(Z) [200x75x9
[200x75x12
λ(Z) [180x75x8
[180x75x11
λ(Z) [165x75x8
[165x75x11
λ(Z) [150x75x7,5
[150x75x10,6
μ(Z)
2,0 0,100
1,5 0,075
1,0 0,050
0,5 0,025
0,20
0,15
0,10
0 1 2 3 4 5 6 Z

ABACO I


FUNÇÕES λ(Z) - μ(Z) - δλ
EXEMPLO Nº2
δΩ
μ(Z) λ(Z)
2,0 0.100
1.5 0.075
1.0 0.050
0.50 0.025
μ(Z)
5%
10%
20%
30%
4%
3%
2%
1%
λ(Z) [200×75×9
[200×75×12
λ(Z) [180×75×8
[180×75×11
λ(Z) [165×75×8
[165×75×11
λ(Z) [150×75×7.5
[150×75×10.5
μ(Z)
0.20
0.15
0.10
0
1
2
3
4
5
6
Z

ABACO II

Funções Cv (z) — τ (x) + μ (x) — Ψ (x) — γ_1 (x) — γ_2 (x)

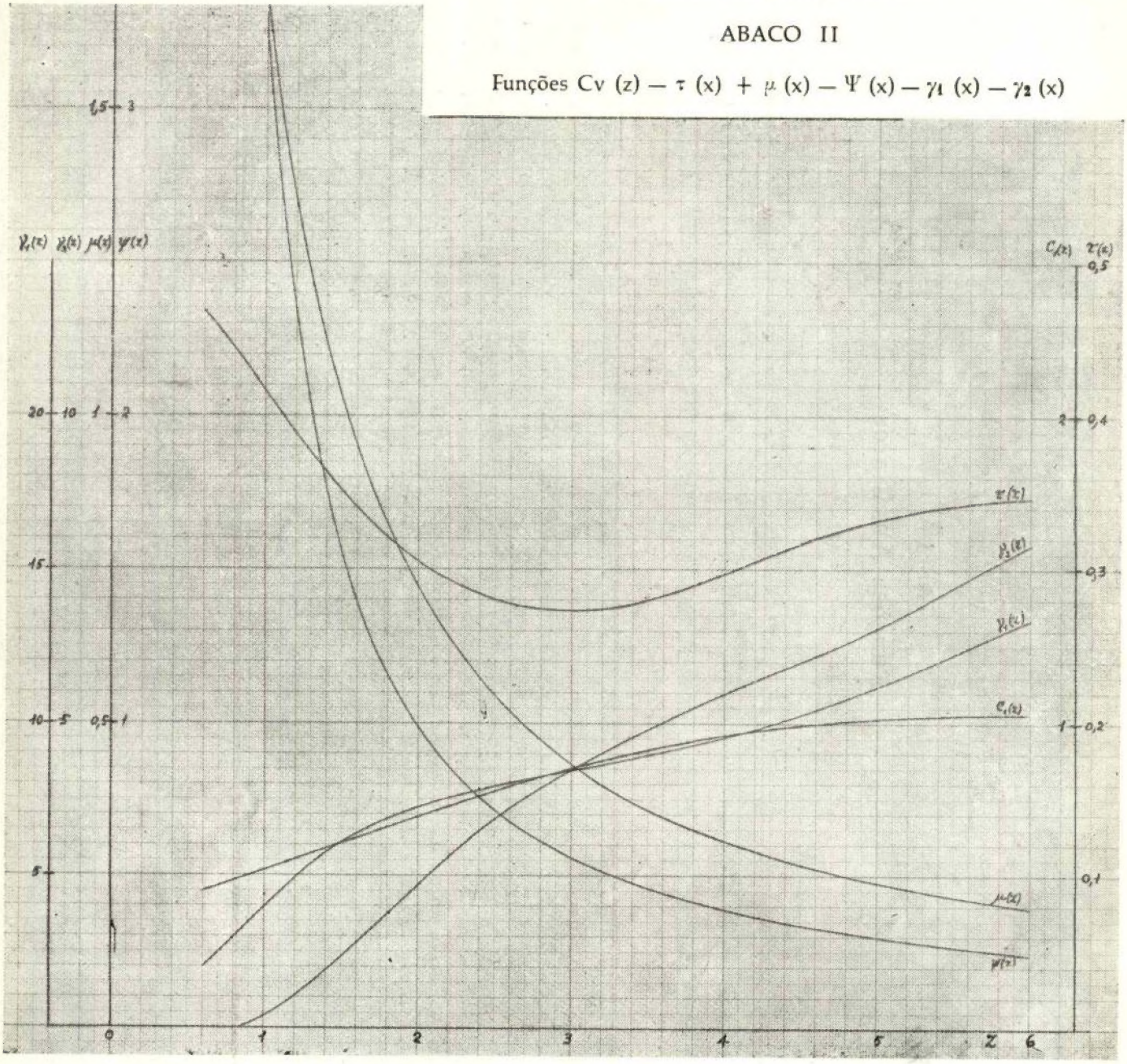


TABELA I

Funções Auxiliares

$L'(z)$ — $P''(z)$ — $T_1(z)$

			(1)			(2)	$L'(z)$		(3)			(4)		$P''(z)$		$T_1(z)$
Z	sh z	sen z	Σ	1,953 sh	1,353 sen	Δ	$L' = \frac{\Delta}{\Sigma}$	sh $\frac{z}{2}$	cos $\frac{z}{2}$	sh . cos	ch $\frac{z}{2}$	sen $\frac{z}{2}$	ch . sen	(3)+(4)	$\frac{(3)+(4)}{(1)}$	2 $P''(z)$	$T_1(z)$
0	0	0	0	0	0	0	$\frac{0}{0}$	0	1	0	1	0	0	1	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	
0,6	0,6361	0,5646	1,2007	1,2422	0,7639	0,4783	0,3875	0,3045	0,9553	0,2909	1,0453	0,2955	0,3089	0,5998	0,500	1,000	1,227
1	1,1752	0,8415	2,0167	2,2952	1,1385	1,1567	0,573	0,5211	0,8776	0,4573	1,1276	0,4794	0,5406	0,9979	0,495	0,990	0,958
1,4	1,9043	0,9854	2,8897	3,7191	1,3332	2,3859	0,825	0,7586	0,7648	0,5802	1,2552	0,6442	0,8086	1,3888	0,481	0,962	0,748
2	3,6269	0,9093	4,5362	7,0833	1,2303	5,8530	1,280	1,1752	0,5403	0,6350	1,5431	0,8415	1,2985	1,9335	0,426	0,852	0,559
2,4	5,4662	0,6755	6,1417	10,6755	0,9127	9,7828	1,605	1,5095	0,3624	0,5471	1,8107	0,9320	1,6876	2,2347	0,3645	0,729	0,487
3	10,0179	0,1411	10,1590	19,5649	0,1909	19,3740	1,906	2,1293	0,0707	0,1505	2,3524	0,9975	2,3463	2,4968	0,2355	0,471	0,474
3,4	14,9654	−0,2555	14,7099	29,2274	−0,3457	29,5731	2,007	2,6456	−0 1288	−0,3408	2,8283	0,9917	2,8048	2,4640	0,1675	0,335	0,485
4	27,2899	−0,7568	26,5331	53,2972	−1,0240	53,3212	2,011	3,6269	−0,4162	−1,5095	3,7622	0,9093	3,4210	1,9115	0,0721	0,1442	0,550
4,4	40,7193	−0,9516	39,7677	79,5248	−1,2875	80,8123	2,032	4,4571	−0,5885	−2,6292	4,5679	0,8085	3,6931	1,0639	0,0267	0,0534	0,584
5	74,2032	−0,9589	73,2443	144,9190	−1,2974	146,2164	1,995	6,0502	−0,8011	−4,8468	6,1323	0,5985	3,6702	−1,1766	−0,0161	−0,0322	0,637
5,4	110,7009	−0,7728	109,9281	216,1984	−1,0457	217,2441	1,976	7,4063	−0,9041	−6,6960	7,4735	0,4274	3,1943	−3,5017	−0,0325	−0,065	0,667
6	201,7132	−0,2794	201,4938	393,9264	−0,3780	394,3044	1,957	10,0179	−0,9900	−9,9177	10,0678	0,1411	1,4206	−8,4971	−0,0421	−0,0842	0,690

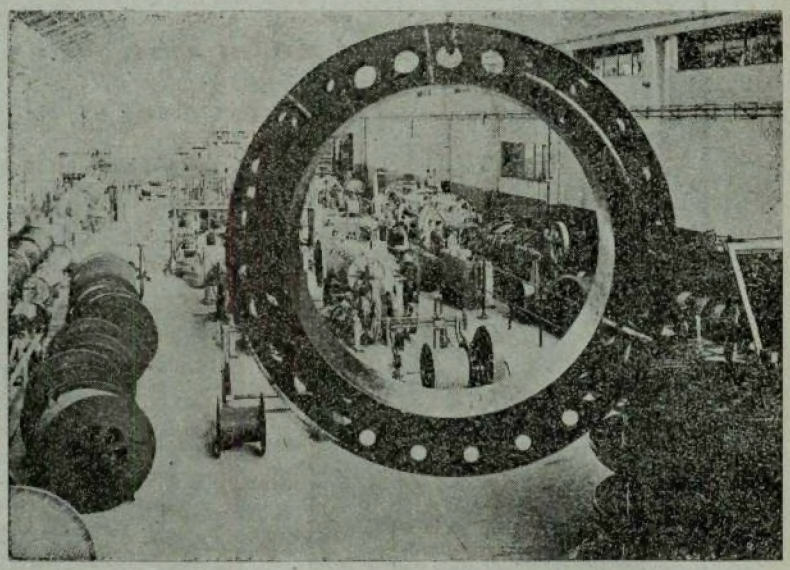
Cabos Armados e Telefónicos, L.da

Fábrica: Venda Nova — Amadora

Administração e Serviços Comerciais

Rua dos Duques de Bragança, 9 — **LISBOA**

Telef. 21978 — 28912 — 32616 — Teleg. «Cabos»



Mangueiras com arame é uma velharia

—

O arame é uma má defesa das mangueiras ordinárias sujeitando-as a cortes e a deformações permanentes

As mangueiras GOODYEAR são mangueiras modernas

Não precisam de arame — resistem por si próprias

Distribuidores Exclusivos: CANELAS & FIGUEIREDO, LIMITADA

Telefones 2 5058 / 2 4502 / 2 1729

RUA DOS FANQUEIROS, 46
LISBOA

Telegramas: *CANELASCO*

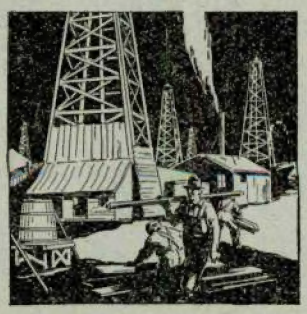


TABELA II

Funções Auxiliares

$f(m, z) - \varphi(m, z)$

Z	$\frac{1}{Z^2}$	$T_1(z)$	$2\frac{N(z)}{Z}$	$f(m,z)$ [linha superior] / $\left[\frac{f(m,z)}{m_1}+1\right] = \varphi(m,z)$ [linha inferior] — m_1										
				0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20
0,6	2,777	1,227	0,999	1,348 14,480	1,360 13,370	1,373 12,445	1,385 11,660	1,397 10,975	1,410 10,405	1,422 9,878	1,435 9,450	1,447 9,045	1,460 8,684	1,473 8,365
1	1,000	0,958	0,995	1,050 11,500	1,059 10,268	1,069 9,908	1,078 9,300	1,088 8,777	1,097 8,322	1,107 7,878	1,116 7,568	1,126 7,258	1,135 6,977	1,145 6,725
1,4	0,511	0,748	0,979	0,8075 9,075	0,8150 8,418	0,8225 7,857	0,8300 7,383	0,8375 6,978	0,8450 6,627	0,8525 6,325	0,8600 6,060	0,8675 5,818	0,8750 5,607	0,8825 5,513
2	0,250	0,559	0,921	0,5715 6,715	0,5771 6,180	0,5827 5,858	0,5883 5,530	0,5939 5,245	0,5995 4,998	0,6051 4,783	0,6107 4,593	0,6163 4,424	0,6219 4,277	0,6275 4,138
2,4	0,169	0,487	0,854	0,475 5,750	0,479 5,350	0,483 5,025	0,487 4,743	0,491 4,510	0,495 4,330	0,499 4,122	0,503 3,960	0,507 3,813	0,518 3,690	0,515 3,575
3	0,111	0,474	0,726	0,3920 4,920	0,3967 4,606	0,4014 4,340	0,4061 4,122	0,4108 3,933	0,4155 3,770	0,4202 3,627	0,4249 3,500	0,4296 3,388	0,4343 3,287	0,4390 3,195
3,4	0,0865	0,485	0,638	0,368 4,680	0,373 4,390	0,378 4,150	0,383 3,947	0,388 3,771	0,393 3,615	0,398 3,490	0,403 3,373	0,408 3,267	0,413 3,173	0,418 3,090
4	0,0625	0,555	0,527	0,3447 4,447	0,3502 4,185	0,3557 3,963	0,3612 3,779	0,3667 3,620	0,3722 3,495	0,3777 3,363	0,3832 3,255	0,3887 3,160	0,3942 3,076	0,3997 2,999
4,4	0,0516	0,584	0,469	0,3327 4,327	0,3385 4,080	0,3443 3,870	0,3501 3,693	0,3559 3,557	0,3617 3,410	0,3675 3,297	0,3733 3,196	0,3791 3,105	0,3849 3,028	0,3907 2,954
5	0,040	0,637	0,404	0,3210 4,210	0,3274 3,977	0,3338 3,780	0,3402 3,618	0,3466 3,475	0,3530 3,353	0,3594 3,247	0,3658 3,150	0,3722 3,068	0,3786 2,994	0,3850 2,925
5,4	0,0343	0,667	0,371	0,3140 4,140	0,3207 3,918	0,3274 3,728	0,3341 3,570	0,3408 3,436	0,3475 3,320	0,3542 3,212	0,3609 3,125	0,3676 3,045	0,3743 2,970	0,3810 2,905
6	0,0278	0,690	0,332	0,2973 3,973	0,3042 3,765	0,3112 3,593	0,3181 3,448	0,3251 3,322	0,3320 3,212	0,3390 3,120	0,3459 3,093	0,3529 3,963	0,3598 2,896	0,3668 2,834

TABELA III

Valores das funções $\mu(z)$; $\gamma_1(z)$; $\gamma_2(z)$ e das relativas funções auxiliares

Z	$C_1(z)$	$\mu(z)$	$\tau(z)$	$\psi(z)$	$C_1^2(z)$	$\gamma_1(z)$	$0{,}906\, C_1(z) - \tau(z)$	$\gamma_2(z)$
0,6	0,449	2,997	0,4665	8,5117	0,2016	1,997	−0,0600	−0,1198
1	0,515	1,677	0,4160	3,2483	0,2652	3,975	0,0508	0,202
1,4	0,588	1,121	0,3640	1,7713	0,3457	5,578	0,1691	0,945
2	0,694	0,721	0,3050	0,9861	0,4816	7,225	0,3240	2,340
2,4	0,761	0,575	0,2837	0,7625	0,5791	7,795	0,4063	3,247
3	0,8484	0,436	0,2737	0,5611	0,7197	8,483	0,4969	4,220
3,4	0,9015	0,371	0,2775	0,4764	0,8127	8,853	0,5390	4,744
4	0,9661	0,307	0,2974	0,3880	0,9333	9,525	0,5776	5,495
4,4	0,9904	0,275	0,3140	0,3452	0,9809	10,110	0,5835	5,895
5	1,0126	0,239	0,3328	0,2961	1,0253	11,210	0,5847	6,550
5,4	1,6258	0,221	0,3408	0,2704	1,0523	12,060	0,5882	7,095
6	1,0344	0,197	0,3470	0,2392	1,0700	13,375	0,5907	7,900

TABELA IV

Valor das funções $C_1(z)\ [1 + f(m, z)]$ (linha sup.er)

e $\delta\pi = \dfrac{\pi - \pi\,\text{min}}{\pi\,\text{min}}$ (linha inf.er)

Z	m_1										
	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20
0,6	1,0560 1,0000	1,0617 1,0055	1,0674 1,0110	1,0731 1,0165	1,0788 1,0220	1,0845 1,0275	1,0902 1,0330	1,0959 1,0385	1,1016 1,0440	1,1073 1,0495	1,1130 1,0550
1	1,0560 1,0000	1,0608 1,0045	1,0656 1,0090	1,0704 1,0135	1,0752 1,018	1,0800 1,0225	1,0848 1,027	1,0896 1,0315	1,0944 1,036	1,0992 1,0405	1,1040 1,0450
1,4	1,0640 1,0080	1,0683 1,012	1,0726 1,016	1,0769 1,020	1,0812 1,024	1,0855 1,028	1,0898 1,032	1,0941 1,036	1,0984 1,040	1,1027 1,044	1,1070 1,048
2	1,0920 1,0340	1,0959 1,0378	1,0998 1,0416	1,1037 1,0454	1,1076 1,0492	1,1115 1,0530	1,1154 1,0568	1,1193 1,0606	1,1232 1,0644	1,1271 1,0682	1,1310 1,0720
2,4	1,1220 1,0630	1,1249 1,0665	1,1278 1,0700	1,1307 1,0735	1,1336 1,0770	1,1365 1,0805	1,1394 1,0840	1,1423 1,0875	1,1452 1,0910	1,1481 1,0945	1,1510 1,0980
3	1,1820 1,1180	1,1859 1,1217	1,1898 1,1254	1,1937 1,1291	1,1976 1,1328	1,2015 1,1365	1,2054 1,1402	1,2093 1,1439	1,2132 1,1476	1,2171 1,1513	1,2210 1,1550
3,4	1,2270 1,1620	1,2306 1,1653	1,2342 1,1686	1,2378 1,1719	1,2414 1,1752	1,2450 1,1785	1,2486 1,1818	1,2522 1,1851	1,2558 1,1884	1,2594 1,1917	1,2630 1,1950
4	1,2760 1,2150	1,2813 1,2193	1,2866 1,2236	1,2919 1,2279	1,2972 1,2322	1,3025 1,2365	1,3078 1,2408	1,3131 1,2451	1,3184 1,2494	1,3237 1,2537	1,3290 1,2580
4,4	1,3060 1,2420	1,3119 1,2472	1,3178 1,2524	1,3237 1,2576	1,3296 1,2628	1,3355 1,2680	1,3414 1,2732	1,3473 1,2784	1,3532 1,2836	1,3591 1,2888	1,3650 1,2940
5	1,3370 1,2690	1,3435 1,2752	1,3500 1,2814	1,3565 1,2876	1,3630 1,2938	1,3695 1,3000	1,3760 1,3062	1,3825 1,3124	1,3890 1,3186	1,3955 1,3248	1,4020 1,3310
5,4	1,350 1,2790	1,357 1,2855	1,364 1,2920	1,371 1,2985	1,378 1,3050	1,385 1,3115	1,392 1,3180	1,399 1,3245	1,406 1,3310	1,413 1,3375	1,420 1,3440
6	1,3440 1,2750	1,3511 1,2815	1,3582 1,2880	1,3653 1,2945	1,3724 1,3010	1,3795 1,3075	1,3866 1,3140	1,3937 1,3205	1,4008 1,3270	1,4079 1,3335	1,4150 1,3400

TABELA V

Cantoneiras a bolbo UNI 1080 — 1083 — b = 75 mm

$R_0 = 100$ cm. ; $\lambda_1 = \frac{I_x}{F^2 R_0^2}$; $\lambda_2 = \left(\frac{v}{R_0}\right)^2 - \lambda_1$

N.°	Profilo mm		F cm²	I_x cm⁴	v cm	$\left(\frac{v}{R^0}\right)^2 \times 100$	$\lambda_1 \times 100$	$\lambda_2 \times 100$
1	200 × 75 ×	7,5	19,4	589	6,56	0,4303	0,3038	0,1265
2		8,5	21,2	632	6,57	0,4316	0 2980	0,1336
3		9,5	23,0	674	6,59	0,4343	0,2930	0,1413
4		10,5	24,8	717	6,61	0,4369	0,2890	0,1479
5	165 × 75 ×	8	22,2	809	7,36	0,5417	0,3645	0,1772
6		9	24,1	864	7,37	0,5432	0,3584	0,1848
7		10	26,1	919	7,39	0,5461	0,3520	0,1941
8		11	28,0	975	7,40	0,5476	0,3480	0,1946
9	180 × 75 ×	8	24,2	1050	8,36	0,6989	0,4335	0,2654
10		9	26,3	1120	8,34	0,6956	0,4255	0,2701
11		10	28,4	1190	8,34	0,6956	0,4185	0,2828
12		11	30,5	1260	8,34	0,6956	0,4185	0,2828
13	200 × 75 ×	9	29,3	1560	9,52	0,9063	0,5320	0,3743
14		10	31,6	1660	9,50	0,9065	0,5254	0,3771
15		11	33,9	1750	9,49	0,9006	0,5160	0,3846
16		12	36,2	1840	9,48	0,8987	0,5075	0,3912

TABELA VI

Valores da função $\pi(z) = \lambda_1 \gamma_1(z) + \lambda_2 \gamma_2(z)$

para cantoneiras a bolbo UNI 1080-1083 b = 75 mm

N.º	$\lambda_1 \longrightarrow X$	$\lambda_2 \rightarrow X$	z = 1 3,975 0,202	$\pi(z)$	2 7,225 2,340	$\pi(z)$	3 8,483 4,220	$\pi(z)$	4 9,525 5,495	$\pi(z)$	5 11,210 6,550	$\pi(z)$	6 13,375 7,900	$\pi(z)$	γ_1 γ_2
1	0,00304	0,00127	0,0121 5 0,0002 5	0,0124	0,0219 5 0,0029 7	0,0249	0,0256 4 0,0053 6	0,0310	0,0289 6 69 8	0,0359	0,0340 7 83 2	0,0424	0,0406 8 100 4	0,0507	
2	0,00298	0,00134	0,0118 2 7	0,0121	0,0215 3 31 4	0,0247	0,0253 2 56 6	0,0310	0,0283 8 73 6	0,0357	0,0334— 87 7	0,0422	0,0399— 106—	0,0505	
3	0,00293	0,00141	0,0116 5 8	0,0119	0,0212— 33—	0,0245	0,0249— 59 6	0,0309	0,0279— 77 5	0,0357	0,0328 5 92 3	0,0421	0,0392— 111 5	0,0504	
4	0,00289	0,00148	0,0115 2 9	0,0118	0,0209— 34 6	0,0244	0,0245 4 62 5	0,0308	0,0275 3 81 3	0,0357	0,0324— 96 8	0,0421	0,0387— 117—	0,0504	
5	0,00365	0,00177	0,0145 5 3 6	0,0149	0,0264— 41 4	0,0305	0,0310 1 74 7	0,0385	0,0347 5 97 2	0,0445	0,0324— 96 8	0,0524	0,0478— 140—	0,0628	
6	0,00358	0,00185	0,0142 5 3 7	0,0146	0,0259— 43 3	0,0302	0,0304— 78 2	0,0382	0,0341— 101 6	0,0443	0,0408 3 116—	0,0523	0,0478 3 146 3	0,0625	
7	0,00352	0,00194	0,0140 7 3 9	0,0144	0,0254 5 45 4	0,0300	0,0299— 82—	0,0381	0,0333— 106 6	0,0440	0,0401 8 121 3	0,0522	0,0471 3 153 3	0,0625	
8	0,00348	0,00200	0,0138 5 4 1	0,0143	0,0251 6 46 8	0,0298	0,0295 5 84 5	0,0380	0,0331 3 111—	0,0442	0,0390— 132—	0,0522	0,0465 5 158 1	0,0624	
9	0,00434	0,00265	0,0171 5 5 4	0,0177	0,0314— 62—	0,0376	0,0368 5 111 8	0,0480	0,0413— 146 6	0,0560	0,0486 3 173 6	0,0660	0,0581 5 209 3	0,0791	
10	0,00426	0,00270	0,0169 5 5 5	0,0175	0,0308— 63 2	0,0371	0,0362— 114—	0,0476	0,0406— 148 5	0,0555	0,0477— 176 9	0,0654	0,0570— 213 2	0,0783	
11	0,00419	0,00277	0,0167 5 7	0,0173	0,0303— 64 8	0,0368	0,0356— 117—	0,0473	0,0399— 152 5	0,0552	0,0470— 181 5	0,0652	0,0561 2 218 8	0,0780	
12	0,00413	0,00283	0,0164 5 5 7	0,0170	0,0298 5 66 2	0,0365	0,0351 3 119 5	0,0471	0,0393— 155 7	0,0549	0,0462 5 185 4	0,0647	0,0553— 223 5	0,0777	
13	0,00532	0,00374	0,0212 7 5	0,0220	0,0383— 87 5	0,0471	0,0451 5 157 8	0,0609	0,0507— 205 8	0,0716	0,0596— 245—	0,0841	0,0711 8 295 3	0,1007	
14	0,00525	0,00377	0,0209 7 6	0,0217	0,0379 5 88 3	0,0468	0,0445 6 159 2	0,0605	0,0499— 207 3	0,0706	0,0587 8 247—	0,0835	0,0702 5 298 2	0,1001	
15	0,00516	0,00385	0,0205 7 8	0,0213	0,0373— 90 1	0,0461	0,0437 6 162 5	0,0600	0,0491 5 211 8	0,0703	0,0577 6 252 4	0,0830	0,0690 5 304 3	0,0995	
16	0,00508	0,00391	0,0202 7 9	0,0210	0,0367 3 91 5	0,0459	0,0432 3 165 2	0,0598	0,0483— 215	0,0698	0,0570— 256 4	0,0826	0,0680— 309—	0,0989	

O MATERIAL DE ILUMINAÇÃO FLUORESCENTE ACEC

CIENTÌFICAMENTE ESTUDADO E VERIFICADO, OFERECE AS MAIS COMPLETAS GARANTIAS DE ALTA

QUALIDADE

LÂMPADAS
BALASTROS
ARRANCADORES
ARMADURAS

UMA DAS FASES DE FABRICAÇÃO DE LÂMPADAS FLUORESCENTES ACEC

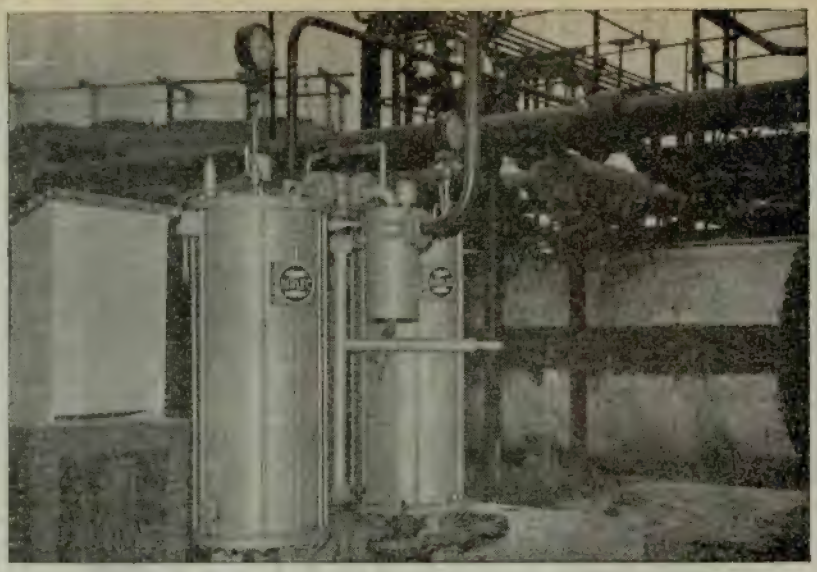
ACEC - ATELIERS DE CONSTRUCTIONS ÉLECTRIQUES DE CHARLEROI

REPRESENTANTES GERAIS

INEL - INDÚSTRIAS ELÉCTRICAS ASSOCIADAS

SEDE EM LISBOA: RUA RODRIGO DA FONSECA, 76, 4.º
TELEF. 730161/2/3/4/5 — TELEG. INELA—LISBOA
DELEGAÇÃO NO PORTO: RUA DE SANTA CATARINA, 470
TELEF. 28841, 28842 e 28843 — TELEG.: INELAPO-PORTO

ACEC CHARLEROI



A **humidade** é a causa de sérios problemas de ordem técnica e de incalculáveis prejuízos.

Estes inconvenientes podem ser totalmente eliminados com a utilização dos **Exsicadores "BIRLEC".**

BIRLEC LIMITED

BIRMINGHAM — Inglaterra

Representantes:

Ahlers, Lindley, Limitada

Rua do Ferregial de Baixo, 33, 2.º
LISBOA Telef. 21321/4

Palácio do Atlantico, 408 — Praça D. João I
PORTO Telef. 31414/5

O cálculo conduzir-se-á como no 2.º caso. Assim teremos:

$$Z' = 2{,}96 \qquad N = 0{,}0467 \qquad \mu'(z) = 0{,}44$$

$$m_1' = \mu'(z) \,.\, M_o = 0{,}1527$$

$$l_1 = b \,.\, \frac{1 + m_1'}{m_1'} = 565 \text{ mm}$$

A espessura deve, sem dúvida, ser: $s = 16$ mm.

A verificação feita, aplicando a fórmula, para a qual é $C_1(z) = 0{,}845$, confirma em absoluto este valor.

O *aumento do peso* será, necessàriamente, um pouco superior, resultando:

$$\delta\pi = 13{,}5\ \%$$

TABELA DAS FUNÇÕES AUXILIARES

$$L_{(z)} = \frac{\text{sh}\, Z - \text{sen}\, Z}{\text{sh}\, Z + \text{sen}\, Z}$$

$$L'_{(z)} = \frac{1{,}953\ \text{sh}\, Z - 1{,}353\ \text{sen}\, Z}{\text{sh}\, Z + \text{sen}\, Z}$$

$$N_{(z)} = \frac{\text{ch}\, Z - \cos Z}{\text{sh}\, Z - \text{sen}\, Z}$$

$$P'_{(z)} = \frac{1{,}545\ \text{sh}\, \frac{Z}{2} \cos \frac{Z}{2} + 0{,}455\ \text{ch}\, \frac{Z}{2}\, \text{sen}\, \frac{Z}{2}}{\text{sen h}\, Z + \text{sen}\, Z}$$

$$P_{(z)} = \frac{0{,}455\ \text{sh}\, \frac{Z}{2} \cos \frac{Z}{2} + 1{,}545\ \text{ch}\, \frac{Z}{2}\, \text{sen}\, \frac{Z}{2}}{\text{sh}\, Z + \text{sen}\, Z}$$

$$P''_{(z)} = \frac{\text{sh}\, \frac{Z}{2} \cos \frac{Z}{2} + \text{ch}\, \frac{Z}{2}\, \text{sen}\, \frac{Z}{2}}{\text{sh}\, Z + \text{sen}\, Z}$$

$$A_{(z)} = 1{,}815\ L_{(z)} + 2\ \rho\, P_{(z)}$$

$$M_{(z)} = \frac{2\ (\rho - 0{,}5)\ N_{(z)}}{Z\ [0{,}85\ A_{(z)} - (\rho - 0{,}5)]}$$

$$T_{(z)} = \frac{A_{(z)}}{0{,}85\ A_{(z)} - (\rho - 0{,}5)} - 1$$

$$C_{(z)} = 0{,}5 + 1{,}815\ (\rho - 0{,}5)\ .\ \frac{L_{(z)}}{A_{(z)}}$$

$$E_{(z)} = 1 - 2\ (\rho - 0{,}5)\ \frac{P_{(z)}}{A_{(z)}}$$

$$F_{(z)} = Z \sqrt{C_{(z)}}$$

BIBLIOGRAFIA

Von Mises — «Der Kristische Ausendunck Zylindrischer Rohe» — May 1914.

Southwell — «On the General Theory of Elastic Stabiliy».

Coak — «The Resistance of Tubes to Collapse».

Luigi Raffo — «I calcoli di robustezza transversale degli scafi resistenti dei sommergibili» — 1954.

A. Arevalo Pelluz — «Observaciones al calculo del casco resistente de los submarinos» — Junio 1944.

E. Dodero — «L'infestonamento dell'involucro negli acafi resistenti a sezione circolaro dei battelli sommergibili» — Novembre 1938.

A. Arevalo Pelluz — «Calculo del casco resistente de submarinos» — Agosto 1944.

Fernandez Avila — «Sobre la aplicacion de la formula de Von Mises en el caso de submarinos» — Enero de 1632.

C. D. U. 28.662

DETERMINAÇÃO DOS CAUDAIS PLUVIAIS URBANOS

OBSERVAÇÃO A COMENTÁRIOS

POR PEDRO CELESTINO DA COSTA
Eng.º Civil (I. S. T.)

No último número desta revista dignou-se fazer o Eng.º Armando Lencastre alguns comentários ao artigo que, com o título acima, publicámos no n.º 262 da *Técnica* de há um ano. A categoria do comentador e o interesse dos comentários compensam largamente o atraso com que os mesmos vêm a público.

Conclui-se, no articulado n.º 4 dos Comentários, parecer evidente «que resultam improcedentes as críticas e observações feitas ao método» do volume de armazenamento no nosso artigo. Da leitura desses Comentários apenas parece ter relação com esta conclusão aquilo que se expõe no articulado n.º 2, a saber que a nossa «confusão» consiste em não havermos distinguido entre o caudal Q dado pela expressão $Q = \frac{\Psi\, IA}{\varepsilon}$ a qual «representa uma capacidade de vazão do colector» e «o caudal de ponta, Qm, do hidrógrafo que a chuva *l* ocasionará na rede».

Não podemos deixar de notar que a razão dessa «confusão» reside exactamente *na própria concepção do método italiano do volume de armazenamento* e que essa «confusão» *resulta da própria definição de ε crítico.*

Com efeito, no método do volume de armazenamento não se pretende dar o caudal de ponta de uma bacia de drenagem apenas em função da área, coeficiente de escoamento e intensidade de precipitação, como é usual em outros métodos de cálculo, porquanto a concepção do método italiano reside em considerar a rede de colectores como um depósito que se enche por virtude das águas pluviais que a ele afluem e se esvazia em virtude da capacidade de vazão dos colectores. Se bem que esta concepção não deva ser a mais apropriada para definir uma rede de colectores de esgotos pluviais, porquanto o escoamento se pode fazer geralmente em condições suficientemente rápidas para não originar efeito de depósito ou retenção e se bem que os efeitos de armazenamento que têm importância mais sensível na redução do caudal de ponta sejam os que derivam do armazenamento ou atraso da água nos terrenos naturais (que o método italiano do volume de armazenamento não tem meios próprios para determinar) — o facto é que, segundo o método em questão, o caudal de ponta será também dependente das características da própria rede, dadas ou pela capacidade de vazão dos colectores ou pelo volume armazenado ou pelo tempo de enchimento desse volume. Pelo que qualquer das fórmulas deduzidas pelo método italiano para determinar o caudal de ponta (e são várias) implica sempre, como aliás é natural, a igualização desse caudal com o caudal à boca cheia do colector de juzante.

Em acordo com os factores ou parâmetros usados pelo método italiano na versão de *Supino* (Le reti idrauliche, 1938), quando aquela condição de igualização de caudais se regista o $\varepsilon \left(= \frac{\Psi\, IA}{Q}\right)$ correspondente designa-se de ε crítico, ou melhor o ε crítico define-se exactamente pela condição de corresponder à precipitação crítica, ou seja aquela que origina o caudal máximo igual ao caudal à boca cheia do colector.

A expressão:

$$Q = \frac{\Psi\, IA}{\varepsilon}$$

dá-nos, assim, o caudal de ponta que iguala o caudal do colector à boca cheia uma vez que ε e consequentemente *l* sejam os críticos, isto é, definam o estado crítico em que há igualização

ou *confusão* entre o caudal do colector à boca cheia e «o caudal do hidrógrafo», na designação do Eng.º Armando Lencastre.

A págs. 168 da obra citada de *Supino* mostra-se como aparece a noção de ε crítico. Determinando por um lado o tempo de enchimento de um canal inicialmente vasio e, por outro, o tempo de duração da precipitação em função de Q por intermédio do parâmetro $\beta \left(=\frac{1}{\varepsilon}\right)$ mostra *Supino* ser possível determinar, por tentativas, o tempo de enchimento que iguala ou supera o tempo da chuvada. Pode, porém, dispensar-se o recurso ao método por tentativas se for possível encontrar o β *correspondente à chuvada mais desfavorável para o colector.* Considerando a fórmula que dá o volume armazenado Vo em função de Q e T_r ou o que dá Q em função de Vo e T_r, a condição para o canal não ficar dimensionado nem por excesso nem por defeito ter-se-à quando T_r (tempo de enchimento) igualar T_p (tempo de precipitação). Igualando os valores de Q determinados a partir de cada um destes tempos, é possível determinar o *«o valor de β que torna máximo Q».*

A pág. 174 raciocínio idêntico é feito na determinação da fórmula do coeficiente udométrico. Continuando a considerar Q como o caudal à boca cheia e sem entrada em carga *(«portata a bocca piena con funcionamento a pelo libero»)* diz Supino textualmente:

> «La portata Q richiesta al canale (con riferimento a un deflusso a boca piena e a pelo libero) varia da una pioggia all'altra; la massima portata se richiede per quel valore di ε per cui risulti $\frac{dQ}{d\varepsilon} = 0$.»

Mostrando, em seguida, como se pode deduzir o ε crítico (tal como se designa a págs. 177), diz que este valor substituído na expressão de Q, *permite conhecer o caudal Q procurado (à boca cheia e sem entrada em carga).*

Como se vê, este autor não tem qualquer dúvida em confundir o caudal à boca cheia com o «caudal do hidrógrafo», uma vez que se trata exactamente de definir a condição em que tal se dá.

Por aqui se pode ver, também, a falta de propriedade da comparação feita com o caso do momento flector e momento resistente de uma viga, pois é do conhecimento geral a inexistência, neste caso, de qualquer parâmetro comparável a ε. Quando muito, poder-se-ia fazer a comparação com o caso de momento flector em viga encastrada, pois esse momento é dependente do grau de encastramento.

A fórmula fundamental $Q = \frac{\psi l A}{\varepsilon}$ ou a sua equivalente $l = \frac{Q\varepsilon}{\psi A}$ estabelece-se *a priori* na verificação da capacidade de vazão de colectores existentes e em relação aos cálculos de novos colectores dimensionados pelo método sem excesso nem defeito verifica-se a satisfaçfação da equação $Q = \frac{\psi l A}{\varepsilon}$ como é fácil de comprovar em qualquer exemplo de aplicação.

Tem, assim, toda a validade as observações e críticas por nós feitas no n.º 262 da *Técnica,* observações essas que põem em evidência ser o caudal de ponta, ao cabo de contas, dependente de $\psi l A$ e de um factor ε que não depende das características da rede, mas apenas de *n.*

Julgamos conveniente aproveitar a oportunidade para esclarecer que o método italiano do volume de armazenamento, se bem que tenha já cerca de meio século de idade, não logrou, ainda, êxito de adopção generalizada entre os engenheiros projectistas, incluindo os próprios italianos, conforme tivemos ocasião de verificar em Roma, e nos foi confirmado pelo Prof. Ippolito quando da sua visita ao nosso país. Se é certo que o método é excepcionalmente interessante do ponto de vista teórico o facto é que ou a sua complexidade, ou a profusão de hipóteses simplificativas, ou a falta de comprovação experimental, ou dúvidas sérias quanto a certas deduções admitidas, não permiram, ainda, considerar este método como ferramenta usual nos cálculos dos caudais pluviais urbanos, sendo o método pràticamente desconhecido em certos meios técnicos e científicos mais evoluídos.

Por nossa parte pudemos concretizar alguns dos pontos fundamentais que nos levaram ao abandono deste método nos cálculos práticos e cuja súmula se encontra no artigo por nós publicado, com o título acima. Uma mais completa pormenorização deste assunto podia ainda pôr

em evidência outros pontos muito importantes, entre os quais o facto do factor n variar, em relação ao regime de chuvadas de Lisboa (que é perfeitamente normal) de forma *exactamente inversa* à que indicam os autores italianos, e ainda que fórmulas fundamentais, como a do coeficiente udométrico, são deduzidas a partir da condição $T_r = T_p$ quando se sabe, pela experiência, que entre o fim da chuvada e o momento em que se regista o caudal de ponta (ou o enchimento da secção) pode mediar um certo período de tempo que autores americanos designam de «lag» e que chega a ser de 30 % do valor do tempo da chuvada.

Continuamos a pensar que se impõe uma re-análise do método em questão. E é muito possível que a introdução da precisão anotada pelo Eng.º Armando Lencastre, em certas passagens da dedução teórica, seja um dos caminhos mais indicados para esse fim.

C. D. U. 519.2

Sobre o planeamento racional de certos ensaios estatísticos correntes

POR M. A. FERNANDES COSTA
Matemático dos Transportes Aéreos Portugueses

1. Introdução

A teoria dos ensaios de hipóteses, sem dúvida um dos capítulos fundamentais da Estatística, é também um dos mais delicados. Ao mesmo tempo, pode afirmar-se sem receio de exagero que essa teoria é deficiente ou incompletamente exposta nos compêndios da disciplina, mesmo tendo em vista as necessidades de cursos elementares. Fica-se intrigado ao ver ignoradas, em livros de texto recentes, contribuições fundamentais cuja omissão não é possível explicar depois de decorrido um quarto de século sobre a sua introdução. Certas noções extraordinàriamente fecundas — as de *erros de primeira e segunda espécie* a que pode conduzir a inferência estatística — e uma alfaia particularmente eficaz — a *função potência* de um ensaio — não costumam ser mencionadas, ou, quando o sejam, não são exploradas devidamente. (1)

Fica assim enunciado um problema instrucional cuja gravidade é por demais aparente, entre nós primeiramente abordado em dois trabalhos precursores no seu campo [1 e 2]. E foi no intuito de também contribuir para remediar tal estado de coisas que se escreveram estas linhas — dirigidas àqueles que, tendo iniciado os seus estudos de Estatística, sintam agudamente as deficiências dos textos existentes e procurem vencer uma perplexão causada pelo incompleto aproveitamento de certos conceitos.

2. O que é um ensaio estatístico

Esquemàticamente, o problema que se pretende resolver é o seguinte: concluir, a partir de uma amostra extraída ao acaso de certo universo, se porventura é crivel que determinado parâmetro θ desse universo tenha o valor θ_0. Trata-se pois de uma indução — mas indução que merece ser distinguida com nome próprio, visto ser possível, como se verá, por intermédio da teoria das probabilidades, aferir os erros a que ela é susceptível de conduzir. Uma tal indução tem o nome de *indução estatística*; e o conjunto das regras de procedimento que conduzam o estatístico a uma decisão é o que se chama um *ensaio da hipótese* $\theta = \theta_0$, que passaremos a designar por H_0.

Exemplo 1:

Propõe-se a um fabricante de lâmpadas um novo processo de fabrico que se afirma elevar a vida média (θ) das lâmpadas para 1100 horas (θ_0). O industrial poderá chegar a uma decisão sobre a vantagem de adoptar o novo processo por intermédio do seguinte *ensaio*: obtidas n lâmpadas por esse processo, determinará o tempo x_i durante o qual cada uma delas se mantenha continuamente acêsa; computará depois a média $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$; e, finalmente, ajuizará da veracidade da hipótese $\theta = 1100$ confrontando $\bar{x}$ com este valor hipotético de acordo com critério a fixar (ver Ex. 3).

A indução amostra $\rightarrow$ universo pode conduzir a dois tipos de erros:

1) Aquele que consiste em rejeitar a hipótese $H_0 : \theta = \theta_0$ quando ela seja realmente verdadeira; é o que se chama um *erro de primeira espécie*.

2) Aquele que consiste em aceitar a hipótese $H_0 : \theta = \theta_0$ quando ela seja realmente falsa (i. e. quando seja $\theta \neq \theta_0$); é o que se chama um *erro de segunda espécie*.

Um ensaio será racionalmente planeado quando as probabilidades de incurso nestes erros tenham limites superiores conhecidos, de preferência li-

(1) Depois de este artigo ter sido escrito foi chamada a atenção do autor para o excelente livro de Hald [14], cujo tratamento do assunto é bastante satisfatório.

mites fixados prèviamente de acordo com as conveniências.

3. Fundamento teórico dum ensaio. Normas de decisão

A base teórica dum ensaio estatístico é a distribuição duma estatística u cuja escolha é até certo ponto arbitrária, embora se faça à luz deste princípio geral:

> A densidade de probabilidade da distribuição de u deve depender do parâmetro θ e não arrastar consigo proibitivas dificuldades de cálculo (1).

Escolhida a estatística u, determina-se a sua d.p. admitindo a veracidade da hip. $H_0 : \theta = \theta_0$; designaremos por $f_n(u \mid \theta_0)$ essa d.p. quando o número de elementos da amostra seja n e exprimi-lo-emos escrevendo (2)

$$u \mid \theta_0 \frown f_n(u \mid \theta_0) .$$

Fixa-se depois um valor α que se esteja disposto a aceitar para a probabilidade de incorrer num erro de primeira espécie: α é o que se chama o *coeficiente de risco*.

Por fim, escolhe-se um domínio R tal que

$$\Pr\{u \in R \mid \theta_0\} = \int_R f_n(u \mid \theta_0)\, du = \alpha. \qquad (1)$$

Colhida a amostra e determinado o valor $\hat{u}$ da estatísca u que nela se observa, se a decisão que o estatístico tome por intermédio do ensaio for regida pela norma

$$\begin{cases} \text{Rejeite-se } H_0 \text{ se } \hat{u} \in R \\ \text{Aceite-se } H_0 \text{ no caso contrário,} \end{cases}$$

é evidente que a probabilidade de cometer um erro de primeira espécie é então α.

O domínio R tem o nome de *domínio de rejeição*; e é evidente haver uma infinidade de domínios de rejeição a que corresponde o coeficiente de risco α, como fàcilmente se conclui atendendo ao significado geométrico da equação (1): iguala α a área da curva $f_n(u \mid \theta_0)$ que se projecta em R.

É na escolha do domínio de rejeição mais conveniente em cada caso particular que intervém a consideração dos erros de 2.ª espécie.

4. Função potência dum ensaio. Escolha do dominio de rejeição

A *função potência* dum ensaio da hipótese $H_0 : \theta = \theta_0$ é, por definição,

$$\mathcal{E}_n(\theta) = \Pr\{u \in R \mid \theta\} = \int_R f_n(u \mid \theta)\, du, \qquad (2)$$

onde $f_n(u \mid \theta)$ representa a d.p. de u quando o valor real do parâmetro desconhecido seja θ:

$$u \mid \theta \frown f_n(u \mid \theta).$$

(2) dá portanto a probabilidade de rejeitar (devidamente) H_0 quando o parâmetro assuma o valor $\theta \neq \theta_0$; por outras palavras, $1 - \mathcal{E}_n(\theta)$ é a probabilidade de cometer um erro de segunda espécie para um valor genérico do parâmetro. Claro que

$$\mathcal{E}_n(\theta_0) = \alpha ,$$

em vista de (1).

Quanto maior for o valor de $\mathcal{E}_n(\theta)$ para cada θ tanto melhor é a protecção que o ensaio oferece contra os erros de segunda espécie.

Exemplo 2

Suponha-se $\theta_0 = 0$ e admita-se que

$$f_n(u \mid \theta) = \sqrt{\frac{n}{20\pi}}\; e^{-\frac{n}{20}(u-\theta)^2} .$$

Considerando $n = 10$ tem-se

$$f_{10}(u \mid 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\; e^{-\frac{1}{2}u^2} .$$

Portanto, quando $n = 10$, u é uma variável normal reduzida se $\theta = 0$. Na Fig. 1 estão representados quatro dos infinitos domínios de rejeição que é possível considerar quando se tome $\alpha = 0{,}1$.

(1) A imperfeição deste enunciado será corrigida, em parte, na sequência do artigo; mas só poderá dar-se um enunciado rigoroso depois de expostos os princípios fundamentais da teoria geral do ensaio de hipóteses [3; 4, p. 245].

(2) A notação aqui empregada é a já consagrada pelo uso e, fora disso, a utilizada em [5].

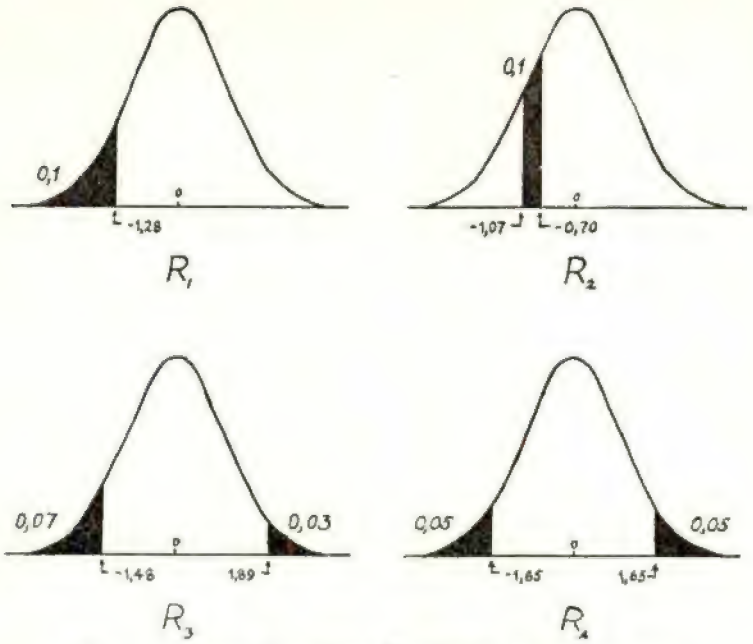


Fig. 1 — Quatro domínios de rejeição possíveis para o ensaio da hipótese $H_0 : \theta = 0$ quando $n = 10$ (v. Ex. 2)

O domínio R_1 é o que se chama um domínio de rejeição *inferior*: toda a área 0,1 se supõe concentrada na cauda esquerda da distribuição. (Anàlogamente, dir-se-ia *superior* um domínio de rejeição que respeitasse à cauda direita da distribuição). R_4 é um domínio de rejeição *equipartido*: a área total 0,1 está igualmente distribuída pelas duas caudas. Vamos ver que são estes os únicos tipos de domínios de rejeição susceptíveis de oferecerem interesse prático.

Na Fig. 2 estão representadas as funções potência (1) dos quatro ensaios correspondentes aos quatro domínios de rejeição considerados. Por ela se vê que R_2 conduz a um ensaio oferecendo muito fraca protecção contra os erros de segunda espé-

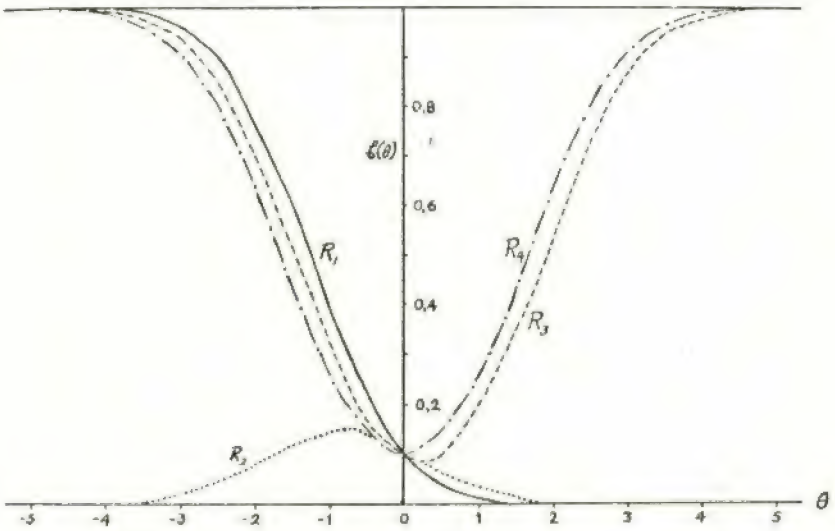


Fig. 2 — Funções potência dos ensaios da hipótese $H_0 : \theta = 0$ baseados nos domínios de rejeição da Fig. 1

(1) Fàcilmente se calculam valores particulares destas funções com o auxilio de uma tabela da distribuição normal.

cie. Para quase todos os valores de θ — salvo os do intervalo $(-1{,}6,\ 0)$ — a probabilidade de rejeitar (devidamente) H_0 é inferior até à probabilidade de rejeitar (indevidamente) a mesma hipótese quando realmente $\theta = 0$. A todo o ensaio em que se verifique esta circunstância chamaremos *viciado* (*biased*, na nomenclatura anglo-saxónica).

O que se diz de R_2 dir-se-ia de qualquer outro domínio de rejeição do mesmo tipo. Conduziria a um ensaio mais viciado do que qualquer outro um domínio de rejeição centrado na origem: a correspondente função potência teria então um máximo em $\theta = 0$.

As críticas feitas a R_2 são até certo ponto extensíveis a R_1 e R_3. Com efeito, o ensaio fundado em R_1 é viciado para $\theta > 0$; e o ensaio fundado em R_3 é viciado para $0 < \theta < 0{,}5$.

À primeira vista, o ensaio preferível a todos os outros é aquele em que se adopte R_1, porquanto a sua função potência admite um mínimo para $\theta = 0$: é um ensaio *não viciado*. Para todo o valor de $\theta \neq 0$, a probabilidade de rejeitar (devidamente) H_0 é superior à probalidade de rejeitar (indevidamente) a mesma hipótese quando seja $\theta = 0$. Mais ainda, a função potência é crescente com $|\theta|$.

Deve porém notar-se que, para todo o valor negativo de θ, o ensaio fundado em R_1 é *mais potente* do que qualquer dos outros, quer dizer, em cada ponto a respectiva função potência toma valor superior aos das outras funções potência; sendo mais potente em todos os pontos $\theta < 0$, o ensaio diz-se *uniformemente mais potente* para as *hipóteses alternativas* $\theta < 0$.

Por conseguinte, sempre que ao estatístico apenas interesse precaver-se contra a possibilidade de aceitar a hipótese $H_0: \theta = 0$ quando na realidade seja $\theta < 0$, nenhum inconveniente oferecendo a eventualidade de aceitar H_0 quando o valor real de θ seja positivo, adoptar-se-á um domínio de rejeição simétrico.

Generalizando, enunciaremos os seguintes princípios, os quais são válidos nas situações mais correntes:

Obtém-se o ensaio uniformemente mais potente da hipótese $H_0: \theta = \theta_0$ para as hipóteses alternativas $\theta < \theta_0$ adoptando um domínio de rejeição inferior; obtém-se o ensaio uniformemente mais potente da hipótese H_0 para as alternativas $\theta > \theta_0$ adoptando um domínio de rejeição superior (1).

Quando interesse considerar todas as alternativas $\theta \gtrless \theta_0$ convém que o ensaio não seja viciado i.e., que a função potência tenha um mínimo para $\theta = \theta_0$. Em muitos casos, o domínio de rejeição obtido repartindo equitativamente a área α pelas duas caudas de distribuição determina um ensaio não viciado (2),

Exemplo 3

Voltando a considerar a situação descrita no Exemplo 1, suponha-se que ao industrial são apresentadas $n = 25$ lâmpadas fabricadas pelo novo processo, que se admite dar lugar a uma dispersão na vida das lâmpadas (x) tal que o desvio padrão da respectiva distribuição seja $\sigma = 80$ horas. Tendo-se observado na amostra uma vida média $\bar{x} = 1060$ horas, pergunta-se: será crível em face deste resultado a veracidade da hipótese H_0 que consiste em admitir para a média θ do universo (totalidade das lâmpadas produzidas pelo novo processo) um valor $\theta_0 = 1100$ horas?

Neste caso, a estatística

$$u = \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

é a mais apropriada ao ensaio da hipótese H_0. Com efeito, sabe-se que, supondo normal a distribuição de x, se tem [5, p. 49; 6, p. 133]

$$\bar{x} \mid \theta_0 \frown N(\theta_0, \sigma/\sqrt{n})$$

e, portanto, $u \mid \theta_0 \frown N(0,1)$ — quer dizer, u é uma variável normal *reduzida* cuja cumulante está extensamente tabelada.

Na presente situação, o industrial necessita precaver-se particularmente contra a eventualidade de vir a aceitar um novo processo menos satisfatório do que o anterior; noutros termos, interessa-lhe minimizar as probabilidades de cometer erros de segunda espécie quando se verifiquem as hipóteses alternativas $\theta < 1100$.

---

(1) Um ensaio que utilize um domínio de rejeição superior ou inferior diz-se *unilateral*.

(2) Um ensaio que utilize um domínio de rejeição equipartido diz-se *bilateral*.

Deverá por isso adoptar um domínio de rejeição inferior.

Tomando um coeficiente de risco $\alpha = 0{,}05$, uma tabela da distribuição normal mostra imediatamente que o domínio de rejeição é definido pela desigualdade

$$u < -1{,}645 \; ;$$

como o valor observado

$$\mathring{u} = \frac{1060 - 1100}{16} = -2{,}5$$

cai nesse domínio, conclui-se que é de rejeitar a hipótese.

Exemplo 4 :

Certo medicamento é apresentado em pílulas que devem ter um peso médio $\theta_o = 10$ cg. Um verificador pesa $n = 50$ pílulas e acha $n\,\bar{x} = 5{,}25$ g. Adoptando um coeficiente de risco $\alpha = 0{,}01$ e supondo que o desvio padrão da distribuição dos pesos é $\sigma = 2$ cg, será aquele resultado coerente com a hipótese H_o de ser o peso médio θ de toda a produção de pílulas igual a 10 cg?

Como neste caso têm igual importância os erros de 2.ª espécie que consistem em aceitar como bom o medicamento quando na realidade seja $\theta > 10$ ou $\theta < 10$, está indicado o uso dum domínio de rejeição equipartido.

Pondo

$$u = \frac{\bar{x} - \theta_o}{\sigma} \sqrt{n} \; ,$$

o domínio de rejeição é definido por

$$u < -2{,}58 \quad \text{e} \quad u > 2{,}58 \; ;$$

ora o valor observado é $\mathring{u} = 0{,}25$ e portanto a hipótese $\theta = 10$ cg é aceitável.

Pode perguntar-se qual a protecção que o ensaio oferece contra a possibilidade de se ter aceitado a hipótese H_o a despeito de ser $|\theta - \theta_o| \geqslant 1{,}5$ cg, desvio que o verificador considera grave.

A função potência do ensaio é

$$\begin{aligned} &\Pr\{u < -2{,}58 \text{ ou } u > 2{,}58 \mid \theta\} = \\ &= \Pr\{3{,}53\,(\bar{x} - 10) < -2{,}58 \mid \theta\} + \\ &\qquad + \Pr\{3{,}53\,(\bar{x} - 10) > 2{,}58 \mid \theta\} \\ &= \Pr\{3{,}53\,(\bar{x} - \theta) < -2{,}58 - 3{,}53\,(\theta - 10) \mid \theta\} + \\ &\quad + \Pr\{3{,}53\,(\bar{x} - \theta) > 2{,}58 - 3{,}53\,(\theta - 10) \mid \theta\} \\ &= \mathcal{E}(\lambda), \quad \text{com } \lambda = \theta - 10. \end{aligned}$$

Ora se θ for o peso médio real ter-se-á

$$3{,}53\,(\bar{x} - \theta) \frown N(0{,}1)$$

e portanto

$$\mathcal{E}(\lambda) = \Phi(-2{,}58 - 3{,}53\,\lambda) + \Psi(2{,}58 - 3{,}53\,\lambda),$$

onde $\Phi(t)$ designa a cumulante de uma variável normal unitária, i.e.

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du$$

e

$$\Psi(t) = 1 - \Phi(t).$$

Observar-se-á que $\mathcal{E}(\lambda)$ é uma função simétrica de λ e crescente com $|\lambda|$, semelhante à função potência correspondente ao domínio de rejeição R_4 representada na Fig. 2.

Por conseguinte, para todos os valores de θ tais que $|\lambda| \geqslant 1{,}5$ ter-se-á

$$\mathcal{E}(\lambda) \geqslant \mathcal{E}(1{,}5)$$

e portanto

$$1 - \mathcal{E}(\lambda) \leqslant 1 - \mathcal{E}(1{,}5).$$

Quer dizer, $1 - \mathcal{E}(1{,}5) = 0{,}003$ é um limite superior da probabilidade de cometer um erro de segunda espécie quando seja $|\theta - 10| \geqslant 1{,}5$.

Noutros termos: utilizando o ensaio descrito, o verificador será levado a aceitar um produto particularmente mau ($|\theta - 10| \geqslant 2{,}5$) apenas 3 vezes, em média, em cada 1000 ensaios que faça.

5. Influência do tamanho da amostra

A função $f_n(u \mid \theta)$ considerada no Ex. 2 servir-nos-á para ilustrar a influência que o tamanho da amostra tem na potência de um ensaio.

Na Fig. 3 estão representadas as funções potência dos ensaios da hipótese H_o: $\theta = 0$ realizados com amostras de $n = 10$, 20, 40 e 100 elementos e baseados em domínios de rejeição do tipo *inferior*.

Da observação da figura infere-se uma conclusão que é extensível a qualquer espécie de ensaio:

> Quanto maior for a amostra, mais potente é o ensaio.

Para um mesmo valor de θ, $\mathcal{E}_n(\theta)$ cresce com n. É portanto solúvel o problema inverso do considerado no Ex. 4, a saber: *qual deverá ser*

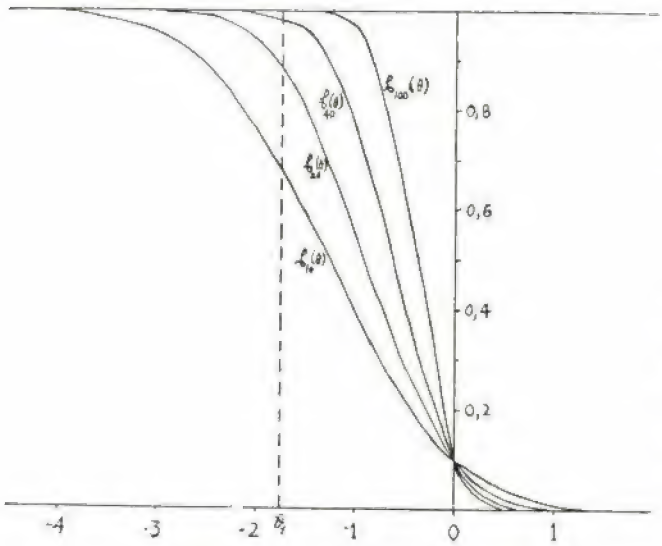


Fig. 3 — Variação com n da função potência de um ensaio unilateral

o tamanho da amostra para que o ensaio ofereça uma protecção contra os erros da 2.ª espécie prèviamente fixada ?

Se o estatístico desejar precaver-se especialmente contra a possibilidade de vir a aceitar a hipótese $H_0: \theta = \theta_0$ quando seja realmente $\theta < \theta_1$, fixará prèviamente um limite superior β para a probabilidade de cometer um erro de 2.ª espécie verificando-se a hipótese alternativa $H_1: \theta < \theta_1$.

Visto ser

$$\Pr\left\{ u \in R \mid \theta < \theta_1 \right\} > \mathcal{E}_n(\theta_1), \qquad (3)$$

e por isso

$$1 - \Pr\left\{ u \in R \mid \theta < \theta_1 \right\} < 1 - \mathcal{E}_n(\theta_1), \qquad (4)$$

o problema ficará resolvido tomando n tal que

$$1 - \mathcal{E}_n(\theta_1) \leqslant \beta. \qquad (5)$$

A desigualdade (3) exprime, evidentemente, que as ordenadas de $\mathcal{E}_n(\theta)$ para $\theta < \theta_1$ são superiores a $\mathcal{E}_n(\theta_1)$; a desigualdade (4) exprime que $1 - \mathcal{E}_n(\theta_1)$ excede a probabilidade de cometer um erro de 2.ª espécie quando θ assuma um valor qualquer inferior a θ_1.

Anàlogamente, se ao ensaiar a hipótese $H_0: \theta = \theta_0$ o estatístico pretender particularmente evitar a aceitação de H_0 quando seja $\theta > \theta_2$ (onde θ_2 designa um valor superior a θ_0 cuja escolha as circunstâncias aconselhem), adoptará um domínio de rejeição superior e determinará o tamanho «ótimo» n da amostra pela condição

$$1 - \mathcal{E}_n(\theta_2) \leqslant \beta; \qquad (5')$$

garantirá assim que

$$1 - \Pr\left\{ u \in R \mid \theta > \theta_2 \right\} < \beta$$

ou seja

$$\Pr\left\{ \text{aceitar } H_0 \mid \theta > \theta_2 \right\} < \beta.$$

Se para o estatístico for igualmente inconveniente a aceitação de $H_0: \theta = \theta_0$ quando o valor real de θ seja bastante superior ou bastante inferior a θ_0, digamos quando $|\theta - \theta_0| > d$, estará então indicado o emprego dum ensaio não viciado (quer dizer, um ensaio cuja função potência tenha um mínimo para $\theta = \theta_0$). Disse-se no § 4 que um domínio de rejeição equipartido dá muitas vezes lugar a um ensaio não viciado.

Se, além disso, a função potência for sempre decrescente para $\theta < \theta_0$ e sempre crescente para $\theta > \theta_0$, o tamanho ótimo da amostra (para um β prèfixado) será o menor valor de n que satisfaça à condição

$$1 - \mathcal{E}_n(\theta') \leqslant \beta, \qquad (5'')$$

onde θ' representa aquele dos pontos $\theta_0 - d$ e $\theta_0 + d$ onde $\mathcal{E}_n(\theta)$ toma maior valor.

6. Ensaios da média duma população normal de variância conhecida

Seja x uma variável cuja distribuição no universo é normal, de média desconhecida μ e desvio padrão σ, este conhecido. Pretende-se ensaiar a hipótese

$$H_0: \mu = \mu_0$$

contra as alternativas:

A) $\mu > \mu_0$ (ou $\mu < \mu_0$)

B) $\mu \neq \mu_0$

O procedimento mais frequente consiste em observar n valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de x e calcular a média

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_1^n x_i.$$

Uma estatística cómoda é

$$u = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma},$$

visto que (1)

$$\bar{x} \mid \mu \frown N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad [5, p.49]$$

e portanto

$$u \mid \mu_0 \frown N(0,1).$$

A) Coloquemo-nos primeiro no caso dum ensaio unilateral fundamentado num domínio de rejeição superior, por exemplo.

Seja α o coeficiente de risco adoptado e designe K_α, como é hábito, o valor duma variável normal unitária tal que

$$\Psi(K_\alpha) = \alpha.$$

O domínio de rejeição é então o intervalo $(K_\alpha, +\infty)$ e a função potência do ensaio é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n(\lambda) &= \Pr\{u > K_\alpha \mid \mu\} \\ &= \Pr\left\{\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma} > K_\alpha - \lambda\sqrt{n} \mid \mu\right\} \\ &= \Psi(K_\alpha - \lambda\sqrt{n}) \qquad \left(\lambda = \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

pois

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma} \mid \mu \frown N(0,1).$$

O valor mínimo de n que torna inferior a β a probabilidade de aceitar H_0 quando seja $\mu > \mu_2$ obtém-se pela condição (cf. (5'))

$$1 - \mathcal{E}_n(\lambda_2) \leqslant \beta \qquad \left(\lambda_2 = \frac{\mu_2-\mu_0}{\sigma}\right)$$

ou seja

$$\Psi(K_\alpha - \lambda_2\sqrt{n}) \geqslant 1 - \beta,$$

donde

$$K_\alpha - \lambda_2\sqrt{n} \leqslant K_{1-\beta} = -K_\beta$$

e portanto

$$n \geqslant \left(\frac{K_\alpha + K_\beta}{\lambda_2}\right)^2.$$

Exemplo 5

Retomemos o problema do industrial do Ex. 3 sob novo ponto de vista.

Suponhamos ainda

$$\mu_0 = 1100\text{h}, \quad \sigma = 80\text{ h}, \quad \alpha = 0{,}05$$

mas determinemos n de modo que a probabilidade de aceitar a hipótese $H_0: \mu = \mu_0$ não exceda $\beta = 0{,}001$ quando seja realmente $\mu < \mu_1 = 1000$ h (este valor coincidirá, por exemplo, com a vida média das lâmpadas fabricadas pelo processo antigo). Neste caso o domínio de rejeição a adoptar é inferior, mas fàcilmente se reconhece, decalcando o raciocínio precedente, que se deve tomar

$$n \geqslant \left(\frac{K_\alpha + K_\beta}{\lambda_1}\right)^2, \text{ com } \lambda_1 = \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma}.$$

Substituindo valores acha-se

$$\left(\frac{K_\alpha + K_\beta}{\lambda_1}\right)^2 = \left(\frac{1{,}645 + 3{,}09}{100/8}\right)^2 = 14{,}6$$

e portanto

$$n \geqslant 15 \text{ lâmpadas}$$

B) Consideremos agora o caso dum ensaio bilateral onde se utilize um domínio de rejeição equipartido constituído pelos intervalos

$$(-\infty, -K_{\alpha/2}) \text{ e } (K_{\alpha/2}, +\infty).$$

A função potência é

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n(\lambda) &= \Pr\{u < -K_{\alpha/2} \mid \mu\} + \Pr\{u > K_{\alpha/2} \mid \mu\} \\ &= \Pr\left\{\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma} < -K_{\alpha/2} + \lambda\sqrt{n} \mid \mu\right\} + \\ &\quad + \Pr\left\{\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma} > K_{\alpha/2} + \lambda\sqrt{n} \mid \mu\right\} \\ &= \Phi(-K_{\alpha/2} + \lambda\sqrt{n}) + \Psi(K_{\alpha/2} + \lambda\sqrt{n}),\end{aligned}$$

função simétrica de $\lambda = (\mu_0 - \mu)/\sigma$

Exemplo 6

Suponhamos, como no Ex. 4, que certo laboratório farmacêutico fabrica um medicamento sob a forma de pílulas com um peso médio $\mu_0 = 10$ cg, sendo $\sigma = 2$ cg o desvio padrão inerente ao processo de fabrico utilizado. Periòdicamente, faz-se uma verificação pela colheita de uma amostra casual de n pílulas cujo peso médio serve para ensaiar a hipótese $H_0: \mu = \mu_0$.

Pergunta-se: utilizando um coeficiente de risco $\alpha = 0{,}01$, que número n convirá tomar para que haja uma probabilidade inferior a $\beta = 0{,}001$ de aceitar H_0 quando o valor real μ difira de $\mu_0 = 10$ cg por mais do que 1,5 cg?

(1) Quando x não seja uma variável normal, ainda se tem aproximadamente $\bar{x} \frown N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$ mesmo com pequenos valores de n [6, p. 137].

Claro que nesta situação está indicado um ensaio bilateral e a precedente função $\varepsilon_n(\lambda)$ é que permitirá resolver o nosso problema. Por ser simétrica esta função, mostra (5'') que n deverá obedecer à condição

$$1 - \varepsilon_n(\lambda') \leqslant \beta$$

onde

$$\lambda' = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75,$$

isto é

$$\Psi(-2{,}58 + 0{,}75\sqrt{n}) + \Psi(2{,}58 + 0{,}75\sqrt{n}) \leqslant 0{,}001.$$

Visto ser a primeira parcela a que tem valor dominante, pondo

$$-2{,}58 + 0{,}75\sqrt{n} = K\beta = 3{,}09,$$

daqui se deduz $n = 57{,}2$; e, como

$$\Psi(2{,}58 + 0{,}75\sqrt{n}) = \Psi(8{,}25)$$

tem valor desprezível, conclui-se que o verificador deverá pesar de cada vez

$$n \geqslant 58 \text{ pílulas.}$$

7. Comparação das médias de duas populações normais de variâncias conhecidas

Designem $x_1, x_2, \ldots, x_m$ m observações duma característica x em certa população $\mathcal{P}$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n observações da característica y, da mesma espécie, noutra população $\mathcal{Q}$.

Supondo

$$x \frown N(\mu_1, \sigma_1) \quad \text{e} \quad y \frown N(\mu_2, \sigma_2)$$

pretende-se ensaiar a hipótese

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

à custa daquelas observações.

Repare-se que, pondo $\theta = \mu_1 - \mu_2$, H_0 é equivalente à hipótese $\theta = 0$.

A estatística apropriada é

$$u = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m} + \dfrac{\sigma_2^2}{n}}}$$

onde

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\sum_1^n x_i \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_1^n y_i,$$

pois quando H_0 seja verdadeira tem-se (1)

$$u \frown N(0,1)$$

A norma do ensaio varia com o ponto de vista em que o estatístico se coloque.

A) Se nenhuma *escolha* entre $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ está em causa, mas apenas se pretende concluir da plausibilidade de H_0, proceder-se-á a um *ensaio bilateral*, usando um domínio de rejeição equipartido.

Exemplo 7

Numa amostra de 8.100 portugueses observa-se uma altura média $\bar{x} = 1{,}62$ m, tendo a disbuição das alturas o desvio padrão $s_1 = 6{,}3$ cm. Numa amostra de 2.500 ingleses, aquelas medidas assumem os valores $\bar{y} = 1{,}72$ m e $s_2 = 6{,}0$ cm.

Indicarão estes dados diferenças entre as alturas médias das duas populações significativa ao nível de 90 % de probabilidade (i.e., sendo $\alpha = 0{,}10$)?

Por terem as duas amostras grande número de elementos, pode supor-se

$$\sigma_1 = s_1 = 6{,}3 \text{ cm} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = s_2 = 6{,}0 \text{ cm.}$$

O valor observado para a estatística u é aqui

$$\mathring{u} = \frac{1{,}62 - 1{,}72}{\sqrt{\dfrac{(6{,}3)^2}{8100} + \dfrac{(6{,}0)^2}{2500}}} = -2{,}5$$

Visto que $\mathring{u} < -K_{\alpha/2} = -1{,}645$, deverá rejeitar-se a hipótese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, isto é, deverá concluir-se pela diversidade das duas populações.

B) Suponhamos agora que sobre os valores observados $\bar{x}$ e $\bar{y}$ se pretende basear uma *decisão de preferência*. É o que sucede quando x e y representam a mesma característica de dois produtos diferentes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ dos quais há que escolher um.

No que se segue supor-se-á que se considera da melhor qualidade aquele dos produtos a que corresponde maior média.

Duas situações distintas se podem apresentar.

B_1) Quando haja interesse em preferir o pro-

(1) Mesmo que x e y não sejam variáveis normais ainda se tem aproximadamente $u \frown N(0,1)$.

duto $\mathcal{P}$ a menos que seja $\mu_1 < \mu_2$, adoptar-se-á a seguinte norma de decisão:

Escolha-se o produto $\mathcal{P}$ se $\mathring{u} > -K_\alpha$
Escolha-se o produto $\mathcal{Q}$ se $\mathring{u} < -K_\alpha$

Corresponde isto a usar um domínio de rejeição *inferior* no ensaio da hipótese $H_0: \theta = \mu_1 - \mu_2 = 0$ e a partir do princípio de que a rejeição de H_0 permite concluir que $\theta < 0$ — e portanto que $\mu_1 < \mu_2$ (1). (Repare-se que o ensaio descrito é o uniformemente mais potente a respeito das alternativas $\theta < 0$).

A função potência é neste caso

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\theta) &= \Pr\{u < -K_\alpha \mid \theta\} \\ &= \Pr\left\{\frac{\bar{x} - \bar{y} - \theta}{\sigma} < K_\alpha - \frac{\theta}{\sigma} \mid \theta\right\} \\ &= \Phi\left(-K_\alpha - \frac{\theta}{\sigma}\right) \qquad \left(\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}\right) \end{aligned}$$

Exemplo 8:

Uma companhia metalúrgica está ponderando a compra de uma mina de carvão, para alimentar os seus altos fornos. Nos arredores da fábrica existem duas minas, A e B, a primeira bastante mais próxima do que a segunda. Em 5 anos de exploração, a mina A forneceu uma produção média mensal $\bar{x} = 150$ toneladas com um desvio padrão $s_1 = 20$ t., ao passo que, durante os últimos 3 anos, a mina B forneceu uma produção média mensal $\bar{y} = 158$ toneladas com um desvio padrão $s_2 = 25$ t.

A não ser que destes dados seja legítimo concluir por maior produtividade da mina B, a companhia preferirá evidentemente a mina A (mais próxima).

Tem-se aqui $m = 60$ (meses), $n = 36$ e pode supor-se $\sigma_1 = s_1 = 20$, $\sigma_2 = s_2 = 25$; por conseguinte,

$$\mathring{u} = \frac{150 - 158}{\sqrt{\frac{20^2}{60} + \frac{25^2}{36}}} = -1{,}63.$$

Como $\mathring{u} > -K_{0,05}$, ao nível de 95 % de probabilidade não há razão para preferir a mina B.

(1) Surge assim oportunidade para cometer um *erro de 3.ª espécie* o qual consiste em concluir que $\mu_1 < \mu_2$ quando na realidade seja $\mu_1 \geqslant \mu_2$.

Vejamos ainda qual a protecção que o ensaio oferece contra as hipóteses alternativas $\mu_2 > \mu_1 + 15$, ou seja $\theta < -15$, número este que teria sido fixado por considerações de ordem económica. Pois que

$$\mathcal{E}(-15) = \Phi\left(-K_\alpha + \frac{15}{\sigma}\right) = \Phi(1{,}655) = 0{,}951,$$

a probabilidade de se ter feito uma má escolha é inferior a 0,05.

B_2) Quando seja indiferente qual dos produtos $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ venha a escolher-se, adoptar-se-á a seguinte norma de decisão:

Escolha-se o produto $\mathcal{P}$ se $\bar{x} > \bar{y}$;
Escolha-se o produto $\mathcal{Q}$ se $\bar{x} < \bar{y}$

Este ensaio sai um pouco fora dos moldes a que obedeceram os anteriores. Não há lugar para considerar «erros de primeira espécie», nem tampouco um «coeficiente de risco»; o erro que aqui interessa estudar aproxima-se mais dos «erros de segunda espécie» anteriormente descritos e é aquele que consiste em escolher o produto a que na realidade corresponda a menor média.

Continuando a representar por θ a diferença $\mu_1 - \mu_2$, a função que aqui desempenha papel análogo ao da função potência é

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\theta) &= \Pr\{\bar{x} < \bar{y} \mid \theta\} \quad \left(\theta > 0 \text{ e } \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right) \\ &= \Pr\left\{\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma} < 0 \mid \theta\right\} = \\ &= \Pr\left\{\frac{\bar{x} - \bar{y} - \theta}{\sigma} < -\frac{\theta}{\sigma} \mid \theta\right\} = \Phi\left(-\frac{\theta}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Exemplo 9

A um industrial que necessita de adquirir cabos de aço oferece-se a escolha entre os fabricados por dois fornecedores, A e B. Mede as tensões máximas suportadas por 30 cabos de cada um dos fornecedores e acha uma tensão média $\bar{x} = 6{,}1$ toneladas com um desvio padrão $s_1 = 0{,}7$ t. para os do fornecedor A e uma tensão média $\bar{y} = 5{,}9$ t. com um desvio padrão $s_2 = 0{,}9$ t. para os cabos do fornecedor B.

Naturalmente, o industrial escolhe os cabos do fornecedor A, mas pode indagar-se qual o risco que ele corre em se decidir pelo pior artigo.

Suponhamos que o industrial considera que uma má decisão o prejudica particularmente se na realidade for $\mu_1 - \mu_2 \leqslant -0{,}25$ t. i.e, se $\theta \geqslant 0{,}25$.

Como

$$\varepsilon\,(0{,}25) = \Phi\left(-\frac{0{,}25}{0{,}03}\right) = \Phi\,(-1{,}88) = 0{,}03,$$

pois $\sigma = \sqrt{\dfrac{0{,}7^2 + 0{,}9^2}{30}} = 0{,}23$ admitindo que $\sigma = s_1$, $\sigma_2 = s_2$, vê-se que o risco de uma decisão tão prejudicial não excede 0,03. Se se quisesse limitar este risco a 0,01 haveria que tomar N cabos de cada uma das proveniências de modo a tornar

$$\frac{0{,}25}{\sigma} = K_{0{,}01}$$

ou seja

$$0{,}25\sqrt{\frac{N}{0{,}7^2 - 0{,}9^2}} = 2{,}33\ ;$$

daqui se deduz

$$N = 45$$

8. Ensaios da média duma população normal de variância desconhecida

A resolução do problema tratado no § 6 é ainda possível quando não seja conhecido σ, embora, como seria de esperar, se levantem algumas dificuldades inéditas.

Antes de mais, ocorre procurar uma estimativa de σ; designando por s o desvio padrão observado numa amostra de n elementos, uma estimativa comumente utilizada é (1)

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\, s\ .$$

Por analogia com o § 6 está então indicado o recurso à estatística

$$u = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{x} - \mu_0)}{\hat{\sigma}}$$

para o ensaio da hipótese $H_0 : \mu = \mu_0$.

Sabe-se [5, p. 56; 6, p. 177] que a distribuição de u, suposta H_0 verdadeira, é a «distribuição de Student com $\nu = n - 1$ graus de liberdade»: indicaremos isso escrevendo

$$u \mid \mu_0 \frown t\,(\nu)\,.$$

(1) $\hat{\sigma}^2$ é uma estimativa «centrada» de σ^2 no senido de Fisher, i. e. $E\,(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$.

A cumulante desta distribuição (que é simétrica) encontra-se tabelada em todos os livros de Estatística, indicando as tabelas, para diferentes valores de ν e α, os «valores críticos» $t_\alpha\,(\nu)$ tais que (1)

$$\Pr\{\,u > t_\alpha\,(\nu)\,\} = \alpha\,.$$

Assim como no § 6, a norma do ensaio é diferente consoante se considerem as hipóteses alternativas

A) $\mu > \mu_0$ (ou $\mu < \mu_0$)

B) $\mu \neq \mu_0$.

No caso A), o ensaio uniformemente mais potente é o que adopte a seguinte norma (cf. § 4):

Rejeite-se H_0 se $\hat{u} > t_\alpha(\nu)$.

No caso B), o ensaio uniformemente mais potente é o que tenha por norma (cf. § 4):

Rejeite-se H_0 se $|\,\hat{u}\,| > t_{\alpha/2}(\nu)$.

Este ensaio bilateral é «não viciado», no sentido que ao termo foi atribuido no § 4.

Não é porém possível determinar «a priori» o tamanho n da amostra que torne suficientemente pequena a probabilidade de incorrer em erros de segunda espécie para certos valores de μ. Resulta isso do facto de a função potência

$$\varepsilon_n(\mu) = \Pr\{\,u > t_\alpha\,(\nu)\mid \mu\,\}$$

depender de σ, cujo valor preciso se desconhece [7].

Exemplo 10

Voltemos uma vez mais ao caso do fabricante de lâmpadas e mantenhamos os dados do Exemplo 3 com excepção de σ, que agora supomos desconhecido; admitiremos aqui que na distribuição da vida das 25 lâmpadas se observou um desvio padrão $s = 80$ h. Esta situação é a mais realista, pois em regra o industrial nenhuma possibilidade tem de estimar a variabilidade da vida das lâmpadas fabricadas pelo novo processo.

Estando indicado o emprego duma região de rejeição inferior, há que confrontar $-t_\alpha\,(24)$ com o valor de

$$\hat{u} = \frac{\sqrt{24}\,(1060 - 1100)}{80} = -2{,}45$$

(1) Para $n > 30$, a distribuição de u confunde-se pràticamente com a de uma variável normal unitária e pode tomar-se $\sigma = s$.

Se se adoptar um coeficiente de risco $\alpha = 0{,}05$, como $\hat{u} < -t_{0,05}(24) = -1{,}711$, é de rejeitar a hipótese $H_0 : \mu = 1100$ h.

9. Comparação das médias de duas populações normais de variâncias desconhecidas.

Manteremos aqui a notação e os dados do § 7, supondo porém agora desconhecidos σ_1 e σ_2; e faremos

$$s_1^2 = \frac{1}{m} \sum_1^m (x_i - \bar{x})^2, \quad s_2^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (y_i - \bar{y})^2.$$

O problema da comparação entre μ_1 e μ_2 é geralmente resolvido partindo do princípio de que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.

Aproveitam-se ambas as amostras para obter uma estimativa «centrada» de σ^2,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{m\, s_1^2 + n\, s_2^2}{m + n - 2}, \quad [8, \text{p. } 191]$$

o que dá para o desvio padrão de $\bar{x} - \bar{y}$ a estimativa $\hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$; e utiliza-se a estatística

$$u = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\hat{\sigma}} \sqrt{\frac{m\,n}{m + n}}$$

para ensaiar a hipótese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. A escolha desta estatística resulta do facto, bem conhecido [8, p. 191], de ser

$$u \mid \mu_1 = \mu_2 \frown t\,(m + n - 2),$$

o que permite tirar partido das tabelas da distribuição de Student.

Em tudo o mais o tratamento é análogo ao do § 7: há igualmente que distinguir os casos A, B_1) e B_2), efectuando no primeiro caso um ensaio bilateral e no segundo um ensaio unilateral (fundamentado em região de rejeição superior ou inferior, conforme esteja indicado). As funções potência não encontram aqui, porém, utilização imediata, em virtude de dependerem do parâmetro desconhecido σ.

Um ponto fraco da análise precedente reside na premissa um tanto arbitrária de ser $\sigma_1 = \sigma_2$, o que raras vezes pode justificar-se «a priori» na prática (1). Felizmente, o problema geral em que tal suposição não intervém encontra-se resolvido [9], havendo até tabelas [10] que dão interesse prático a essa solução — a qual, friza-se veementemente, não coincide com outra mais antiga inspirada pela teoria da «fidutial inference» de R. A. Fisher [6, p. 257; 15].

Repare-se, porém, que se m e n forem suficientemente grandes (digamos 30), se tem pràticamente $u \frown N(0,1)$ e pode tomar-se $\sigma_1 = s_1$, $\sigma_2 = s_2$ (ver Exs. 7, 8 e 9).

10. Ensaios da variância de uma população normal

Continuamos a designar por x uma variável normal de que se observaram n valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e cujo desvio padrão σ agora se supõe desconhecido.

Para o ensaio da hipótese

$$H_0 : \sigma = \sigma_0$$

é particularmente apropriada a estatística

$$u = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} = \frac{n\, s^2}{\sigma_0^2},$$

pois que

$$u \mid \sigma_0 \frown \chi^2\,(n - 1), \quad [8, \text{p. } 169]$$

não dependendo por isso a distribuição de u da média (desconhecida) de x.

Tal como no § 6, há que distinguir aqui as hipóteses alternativas

$$\text{A)} \quad \sigma > \sigma_0 \quad (\text{ou } \sigma < \sigma_0)$$

e

$$\text{B)} \quad \sigma \neq \sigma_0$$

contra as quais o estatístico tenha de precaver-se.

No que segue designar-se-á por $\chi^2_\alpha(\nu)$ o «valor crítico» duma variável χ^2 com ν graus de liberdade para o qual se tenha

$$\Pr \{ \chi^2(\nu) > \chi^2_\alpha(\nu) \} = \alpha,$$

representando também α, como de costume, o coeficiente de risco adoptado. Em [6], por exem-

---

(1) Esta justificação só pode ser dada por intermédio de um ensaio da hipótese $\sigma_1 = \sigma_2$ (ver § 11).

plo, encontra-se uma boa tabela destes valores críticos.

No caso A) está indicado o recurso a uma região de rejeição superior (ou inferior, se as hipóteses alternativas forem $\sigma < \sigma_0$; mas esta eventualidade raramente surge na prática).

Rejeitar-se-á portanto H_0 se $\hat{u} > \chi^2_\alpha (n-1)$ e aceitar-se-á H_0 se suceder o contrário.

A função potência do ensaio é, designando por $X_\nu(x)$ a cumulante de uma variável $\chi^2(\nu)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n(\sigma) &= \Pr\{u > \chi^2_\alpha(n-1) \mid \sigma\} \\ &= \Pr\left\{\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} u > \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi^2_\alpha(n-1) \mid \alpha\right\} \\ &= 1 - X_{n-1}\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi^2_\alpha(n-1)\right),\end{aligned}$$

visto que

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} u \mid \sigma \frown \chi^2(n-1).$$

Esta expressão de $\mathcal{E}_n(\sigma)$, que evidentemente cresce com σ, permite determinar n de modo que seja inferior a β a probabilidade de aceitar H_0 quando o valor real de σ exceda σ_1. Para isso deverá n satisfazer à condição [§ 5]

$$1 - \mathcal{E}_n(\sigma_1) \leqslant \beta,$$

equivalente a

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_\alpha(n-1) \leqslant \chi^2_{1-\beta}(n-1),$$

ou ainda a

$$\frac{\chi^2_\alpha(n-1)}{\chi^2_{1-\beta}(n-1)} \leqslant \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}.$$

A função

$$\rho(\alpha, \beta, n_1) = \frac{\chi^2_\alpha(n_1)}{\chi^2_{1-\beta}(n_1)},$$

que decresce quando $n_1 = n-1$ aumenta, encontra-se tabelada para $\alpha = 0{,}01$ ou $0{,}05$ e diferentes valores de β, variando o argumento n_1 de 1 a 120 [11, pp. 272 e 276].

Estas tabelas possibilitam portanto a utilização simples e imediata da função potência.

É fácil de ver que

$$\rho'(\alpha, \beta, n_1) = \frac{\chi^2_{1-\alpha}(n_1)}{\chi^2_\beta(n)} = \frac{1}{\rho(\beta, \alpha, n_1)}$$

tem correspondente utilização nos ensaios de H, contra as alternativas $\sigma < \sigma_0$.

No caso B) deverá empregar-se uma região de rejeição equipartida, rejeitando H_0 se

$$\hat{u} < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \quad \text{ou} \quad \hat{u} > \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$$

e aceitando H_0 se

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \hat{u} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1).$$

Em virtude da assimetria da distribuição do χ^2, o ensaio assim definido é ligeiramente «viciado» (§ 4), particularmente para n pequeno; mas não se dispõe de tabelas suficientemente pormenorizadas que permitam refinar a técnica acima recomendada.

Exemplo 11

Suponhamos que o fabricante de pílulas considerado nos Ex. 4 e 6 pretende assegurar-se de que a distribuição dos pesos das suas pílulas tem realmente um desvio de padrão que não excede $\sigma_0 = 2$ cg. Deverá portanto ensaiar a hipótese $H_0 : \sigma = \sigma_0$ contra as alternativas $\sigma > \sigma_0$, para o que determina o d. padrão $s = 2{,}2$ cg de uma amostra de $n = 25$ pílulas e calcula

$$\hat{u} = \frac{25 \times (2{,}2)^2}{4} = 30{,}3;$$

e, se adopta $\alpha = 0{,}01$, será levado a aceitar H_0, pois $\chi^2_{0{,}01}(24) = 42{,}98$.

Averiguemos qual é a protecção que o ensaio oferece contra a possibilidade de se ter aceitado H_0 a despeito de ser $\sigma \geqslant 2{,}6$ cg $= \sigma_1$ (hipótese H_1).

Visto que

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi_\alpha^2(24) = \frac{2^2}{(0{,}6)^2} \times 42{,}98 = 25{,}5,$$

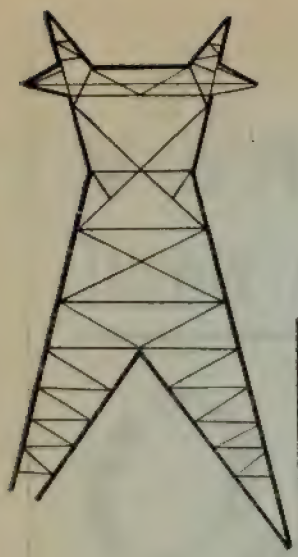
a probabilidade de aceitar H_0 quando H_1 seja verdadeira não excede

$$1 - \mathcal{E}_{25}(2{,}6) = X_{24}(25{,}5) \simeq 0{,}6.$$

Pergunta-se agora: qual deverá ser o número n de pílulas da amostra para que esta probabilidade desça para 0,05? Uma vez que $\sigma_1^2 / \sigma_0^2 = (2{,}6/2)^2 = 1{,}69$ e das tabelas se tira

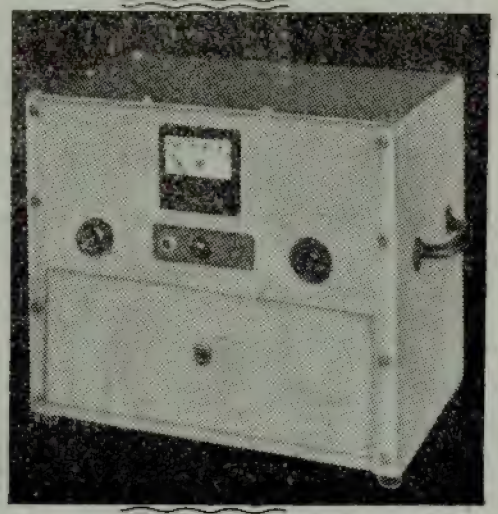
$$\rho(0{,}01;\ 0{,}05;\ 100) = 1{,}74,$$
$$\rho(0{,}01;\ 0{,}05;\ 120) = 1{,}65,$$

vê-se que $n \geqslant 114$ satisfaz à condição imposta.



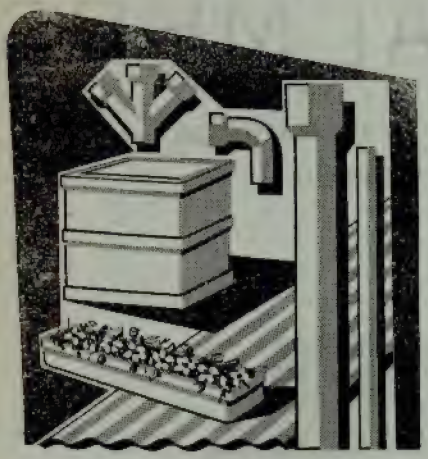
Estabilisadores para corrigir as flutuações de tensão das redes de alimentação

Estabilizador a 0,2 % da tensão nominal para variações de tensão da rede entre + 10 % e − 15 %



PARA MAIS ESCLARECIMENTOS CONSULTE A SECÇÃO DE INDÚSTRIA DA

PHILIPS



FIBROCIMENTO

Cimianto

SOCIEDADE TÉCNICA DE HIDRÁULICA

S. A. R. L.

Sede: Av. Fontes Pereira de Melo, 14

Telef. 731161 (4 linhas)

LISBOA

Fábrica: Cortes da Quintinha

Telefs. 050141 e 050062

ALHANDRA

TUBOS ✦ CHAPAS

RESERVATÓRIOS ✦ FLOREIRAS

AUTOCLISMOS ✦ COLMEIAS

OUTRAS PEÇAS MOLDADAS

AGENTES E REVENDEDORES EM TODO O PAÍS

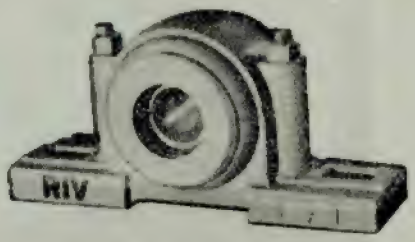
ROLAMENTOS DE ESFERAS E ROLOS
PARA TODAS AS APLICAÇÕES

RIV

1906 RIV 1956

AO SERVIÇO DA TÉCNICA MUNDIAL

A organização **RIV** através das suas três fábricas, dos seus 11.000 engenheiros, técnicos e operários especializados utilizando a mais moderna e eficiente maquinaria, oferece a mais segura garantia da alta qualidade dos seus produtos, e coloca ao dispor de todos os técnicos por intermédio dos seus representantes exclusivos em Portugal, a sua inegável experiência em todos os campos da actividade industrial.



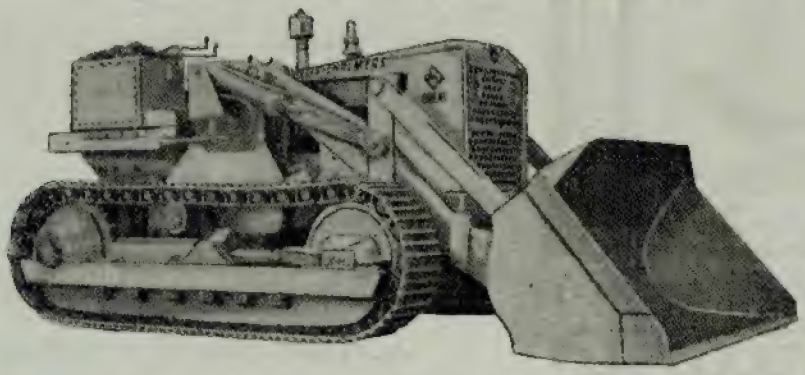
REPRESENTANTES
AUTO-LUSITANIA
AVENIDA DA LIBERDADE, 73-79 • TELEF. 31331-5 • LISBOA

MAQUINARIA PARA REMOÇÃO DE TERRAS

A-C

ALLIS-CHALMERS

ROBUSTEZ — EFICIÊNCIA — ECONOMIA
AO SERVIÇO DO PROGRESSO



Tractor shovel HD 6 G — 72 H. P. — 1 1/2 jarda cúbica

ÚNICOS DISTRIBUIDORES:

H. VAULTIER & C.ª

43 — Calçada Marquês de Abrantes — 45 — LISBOA

11. Comparação das variâncias de duas populações normais

Mantendo os dados e a notação do § 9, designem s_1 e s_2 os desvios padrões observados nas amostras $x_1, x_2, \ldots, x_m$ e $y_2, y_2, \ldots, y_n$, respectivamente.

Para ensaiar a hipótese

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$$

está particularmente indicada a estatística

$$u = \frac{m\,(n-1)\,s_1^2}{n\,(m-1)\,s_2^2},$$

pois

$$u \mid \sigma_1 = \sigma_2 \frown F\,(m_1, n_1),$$

onde $F\,(m_1, n_1)$ representa a distribuição de Snedecor com $m_1 = m-1$ e $n_1 = n-1$ graus de liberdade [6, p. 182], a qual é independente de σ_1 e σ_2.

A situação mais corrente é aquela em que x e y representam a mesma característica de dois produtos diferentes P e Q e se pretende basear a escolha de um ou outro nos valores s_1 e s_2 observados nas duas amostras, considerando-se de melhor qualidade o produto em que essa característica apresente menor variabilidade (i. e. o produto a que corresponda o menor dos desvios padrões σ_1 e σ_2).

Tal como no § 7, há lugar para distinguir dois casos.

A) Suponhamos que há interesse em preferir o produto P a menos que seja $\sigma_1 > \sigma_2$. Nessas condições, deverá ensaiar-se a hipótese H_0 contra as alternativas $\sigma_1 > \sigma_2$, escolhendo-se P se for de rejeitar H_0. Adoptar-se-á portanto a seguinte norma :

Escolha-se o produto P se $\hat{u} \leqslant F_\alpha\,(m_1, n_1)$

Escolha-se o produto Q se $\hat{u} < F_\alpha\,(m_1, n_1)$

α designa, como de costume, o coeficiente de risco e $F_\alpha\,(m_1, n_1)$ o valor de uma variável $F\,(m_1, n_1)$ que tenha a probabilidade α de ser excedido. Em qualquer livro de Estatística pode encontrar-se uma tabela destes «valores críticos», sendo particularmente pormenorizada a dada em [4].

Representando por $\Phi_{m,n}(z)$ a cumulante de uma variável $F\,(m, n)$, tem-se para a função potência, no caso que estamos considerando, a expressão

$$\mathcal{E}\,(\varphi) = \Pr\left\{ u > F_\alpha\,(m-1, n-1) \mid \sigma_1^2 = \varphi\,\sigma_2^2 \right\}$$

$$= \Pr\left\{ u\,\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > \frac{F_\alpha\,(m-1, n-1)}{\varphi} \,\middle|\, \sigma_1^2 = \varphi\,\sigma_2^2 \right\}$$

$$= \Phi_{m-1,\,n-1}\left(\frac{F_\alpha\,(m-1, n-1)}{\varphi} \right),$$

pois

$$u\,\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{n-1}{m-1} \cdot \frac{m\,s_1^2/\sigma_1^2}{n\,s_2^2/\sigma_2^2} \frown F\,(m-1, n-1),$$

visto que

$$m\,s_1^2/\sigma_1^2 \frown \chi^2\,(m-1) \quad \text{e} \quad n\,s_2^2/\sigma_2^2 \frown \chi^2\,(n-1).$$

Ter-se-á portanto $1 - \mathcal{E}\,(\varphi) \leqslant \beta$ se

$$\frac{F_\alpha\,(m-1, n-1)}{\varphi} \geqslant F_{1-\beta}\,(m_1-1, n-1),$$

i. e. se

$$\frac{F_\alpha\,(m-1, n-1)}{F_{1-\beta}\,(m-1, n-1)} \leqslant \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}.$$

A utilização da função potência torna-se possível devido à publicação de extensas tabelas da função

$$\varphi\,(\alpha, \beta, m_1, n_1) = F_\alpha\,(m-1, n-1) \,/\, F_{1-\beta}\,(m-1, n-1)$$

para $\alpha = 0{,}05$ e $0{,}01$ e diferentes valores de β [11, pp. 284-309].

Exemplo 12

Se um experimentador dispõe de uma amostra de 35 artigos do produto P, quantos artigos do produto Q deverá tomar para que o ensaio descrito, com $\alpha = 0{,}05$, tenha uma probabilidade inferior a $\beta = 0{,}25$ de conduzir à escolha de P quando seja $\sigma_1 / \sigma_2 \geqslant 1{,}5$?

Tendo-se aqui $m_1 = 34$, há que procurar n_1 tal que

$$\varphi\,(0{,}05\,;\ 0{,}25\,;\ 34\,;\ n_1) = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 2{,}25.$$

Das tabelas tira-se, por interpolação,

$$\varphi\,(0{,}05\,;\ 0{,}25\,;\ 34\,;\ 30) = 2{,}307,$$
$$\varphi\,(0{,}05\,;\ 0{,}25\,;\ 34\,;\ 40) = 2{,}162$$

e, daqui, $n_1 = 33$; $n = 34$, portanto.

B) No caso em que seja indiferente qual dos produtos P ou Q venha a escolher-se, adoptar-se-á a seguinte norma de decisão:

Escolha-se o produto P se $\hat{u} < F_{0.50}\ (m-1, n-1)$
Escolha-se o produto Q se $\hat{u} > F_{0.50}\ (m-1, n-1)$

Se for $m = n$ podem aproveitar-se as referidas tabelas de $\varphi\ (\alpha, \beta, m_1, n_1)$, se se atender a que

$$\varphi\ (0{,}50, \beta, n, n) = \varphi\ (\beta, 0{,}50, n, n).$$

Quando o problema se resume a uma simples comparação das variâncias de duas populações $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ e não haja lugar para fazer qualquer espécie de escolha mas apenas se pretende ensaiar a hipótese $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$, poderia tomar-se um domínio de rejeição *equipartido*; aceitar-se-ia então H_0 sempre que

$$F_{1-\alpha/2}\ (m_1, n_1) < \hat{u} < F_{\alpha/2}\ (m_1, n_1).$$

Todavia, o ensaio assim definido é «viciado» (§ 4), sendo preferível recorrer à nova estatística

$$v = \frac{(m_1 + n_1) \log_e s^2 - m_1 \log_e (m\, s_1^2/m_1) - n_1 \log_e (n\, s_2^2/n_1)}{1 + \nu},$$

onde

$$s^2 = \frac{m\, s_1^2 + n\, s_2^2}{m_1 + n_1} \quad e \quad \nu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{n_1} - \frac{1}{m_1 + n_1}\right).$$

Tem-se, aproximadamente,

$$v \frown \chi^2\ (1)$$

e sabe-se que o ensaio fundamentado em v é «não viciado» desde que o domínio de rejeição empregado seja *superior* [12].

REFERÊNCIAS

[1] — Gustavo de Castro, «Sobre um Problema de Fisher». *Revista do Centro de Estudos Demográficos*, n.º 7.

[2] — Gustavo de Castro, «Sobre a Teoria Elementar do Ensaio de Hipóteses». *Revista de Economia*, vol. III, fasc. III.

[3] — J. Neyman, «Basic Ideas and Recent Results in the Theory of the Tests of Hypotheses». *Jour. Roy. Stat. Soc.*, vol. CV, p. 292.

[4] — A. M. Mood, *Introduction to the Theory of Statistics*. Mc Graw Hill Book Co, New York, 1950.

[5] — M. A. Fernandes Costa, «Sobre o cálculo da Distribuição de uma Variável Casual», *Boletim do Inst. dos Act. Port.*, n.º 8.

[6] — J. F. Kenney e E. S. Keeping, *Mathematics of Statistics*, Part 2, 2nd. ed. D. Van Nostrand Company, New York, 1951.

[7] — J. Neyman and B Tokarsca, «Errors of the Second Kind in Testing «Student's» Hypothesis, *Jour. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 31, pp. 318-326.

[8] — C. E. Weatherburn, *A First Course in Mathematical Statistics*, 2nd ed. Cambridge Univ. Press, 1949.

[9] — B. L. Welch, «The generalization of «Student's» problem when several different population variances are involved». *Biometrika*, vol. XXXIV, Jan. 1947, pp. 28-35. Ver também vol. XLI, Dec. 1954.

[10] — Alice A. Aspin, «Tables for use in comparisons whose accuracy involves two variances, separately estimated». *Biom.*, vol. XXXVI, Dec. 1949, p. 290-296.

[11] — Statistical Research Group, Columbia University, «Techniques of Statistical Analysis», Mc. Graw — Hill Book Company, New York, 1947.

[12] — E. J. G Pitman, «Tests of Hypotheses concerning location and Scale paramenters» *Biometrika*, vol. XXXI, pp. 200-215.

[13] — H. Scheffé, «On solutions of the Behrens — Fisher problem based on the *t* - distribution», *Ann. Math. Stat.*, vol. 14 (1943), pp. 35-44.

[14] — A. Hald, *Statistical Theory with Engineering Applications*. John Wiley, New York, 1952.

[15] — M. A. Fernandes Costa, «Nota sobre o problema da comparação das médias de dois universos normais». *Gazeta de Matemática* n.º 63-64.

ABSTRACT

This is an expository article on the basic ideas of the theory of the tests of hipotheses, written with the purpose of showing that they could and should be included in all text-books on statistics, no matter how elementary.

Though in a few recent books at the intermediate level the concept of power function is introduced, its possibilities have hardly been exhausted.

C. D. U. 545.81:546.73

Método colorimétrico de dosagem do cobalto

FRAÚSTO DA SILVA

do curso de Engenharia Quím. Ind.
bolseiro do Instituto de Alta Cultura
— Centros de Estudos de Energia Nuclear —
Laboratório de Química I. S. T. — LISBOA

RESUMO

Apresenta-se um método colorimétrico de dosagem do cobalto com base na formação, em meio amoniacal, de um complexo fortemente côrado de azul-arroxeado com EDTA e O_2H_2.

O complexo é muito estável e a técnica permite larga margem de segurança nas quantidades de reagentes adicionados.

Interferem principalmente Fe, Ti e iões côrados.

RESUMÉ

Une méthode de dosage du cobalt est décrite, par détermination colorimétrique.

Les reactifs sont O_2H_2 et EDTA en solution ammoniacale. Dans ces conditions Co^{++} donne un complexe de couleur bleu-pourpre très intense qui n'est pas affectée par excès de reactifs.

Interfèrent surtout Fe e Ti et les autres ions colorés.

SUMMARY

A colorimetric method is proposed for the determination of cobalt, with O_2H_2 and EDTA. In ammoniacal solution Co develops a deep reddish-blue colour, which is very stable and not appreciably affected by an excess of reagents.

The main interferences are Fe, Ti and also great amounts of other coloured ions.

Numa referência da «Zeitschrift für analytische Chemie», (1) tomámos conhecimento do trabalho de P. Schneider e J. Janko, publicado posteriormente em outra revista (2), onde se descreve um método, bastante seguro e com poucas interferências, de doseamento espectrofotométrico do ferro, aproveitando a cor dum complexo de Fe^{+3} com a complexona III e O_2H_2, em presença dum excesso de amónia.

Depois de adaptado o método a certos dos nossos problemas de rotina analítica, quizemos averiguar se outros elementos dariam complexos do mesmo tipo e assim tivemos ocasião de confirmar alguns resultados de Schwarzenbach (3) e Ringbom (4) de que viemos a tomar conhecimento. O primeiro destes autores estuda em especial o complexo de cobalto com o ácido etileno-diamina-tetracético e o segundo refere-se no seu artigo à possibilidade de empregar este tipo de complexos à análise, mas sem descrever qualquer destas aplicações.

Achámos de interesse estudar neste sentido o cobalto e o níquel, mas verificámos que a sensibilidade no caso deste último metal é pequena, pois a cor não é alterada sensivelmente pelo OH_2. Pelo contrário, com o cobalto obtém-se uma cor azul-arroxeada muito intensa que, segundo Schwarzenbach (3), não é devida a um peroxo-complexo mas a um hidroxo-complexo com EDTA do cobalto trivalente. Neste caso o papel da água oxigenada será apenas o de oxidar o cobalto II a III. Em solução alcalina obtém-se, segundo o mesmo autor:

$$2\ Co\ Y^{-2} + O_2H_2 \rightarrow 2\ [Co\ Y\ (OH)]^{-2}$$

1 — Estudo da curva de absorção do complexo

Dado o nosso objectivo, usámos o espectrofotómetro de Beckman, modelo B. As curvas da fig. I, correspondem respectivamente ao complexo em meio alcalino (excesso de amónia). e em meio ácido. Qualquer das curvas apresenta dois máximos nìtidamente definidos que em meio

ácido são desviados um pouco no sentido dos menores comprimentos de onda. Para maior simplicidade, apenas indicamos as curvas para uma dada concentração do cobalto, mas verificámos que a sua forma e a posição dos máximos se conserva para outros teores. Quanto aos reagentes, usámos sempre um nítido excesso, pois verificámos que se pode assim trabalhar com grande «se gurança», no sentido que dá Charlot a este termo.

obtida pela junção de O_2H_2 + OHAm + EDTA ao Co^{+2} resulta da mistura de dois complexos, cujas proporções relativas se conservam constantes, pelo menos usando a técnica adiante referida. Isto permite-nos utilizá-la para doseamento do cobalto.

Vê-se que (fig. I) em meio ácido a sensibilidade é aumentada. Mas, ao contrário do que sucede em meio amoniacal, a absorvância, como

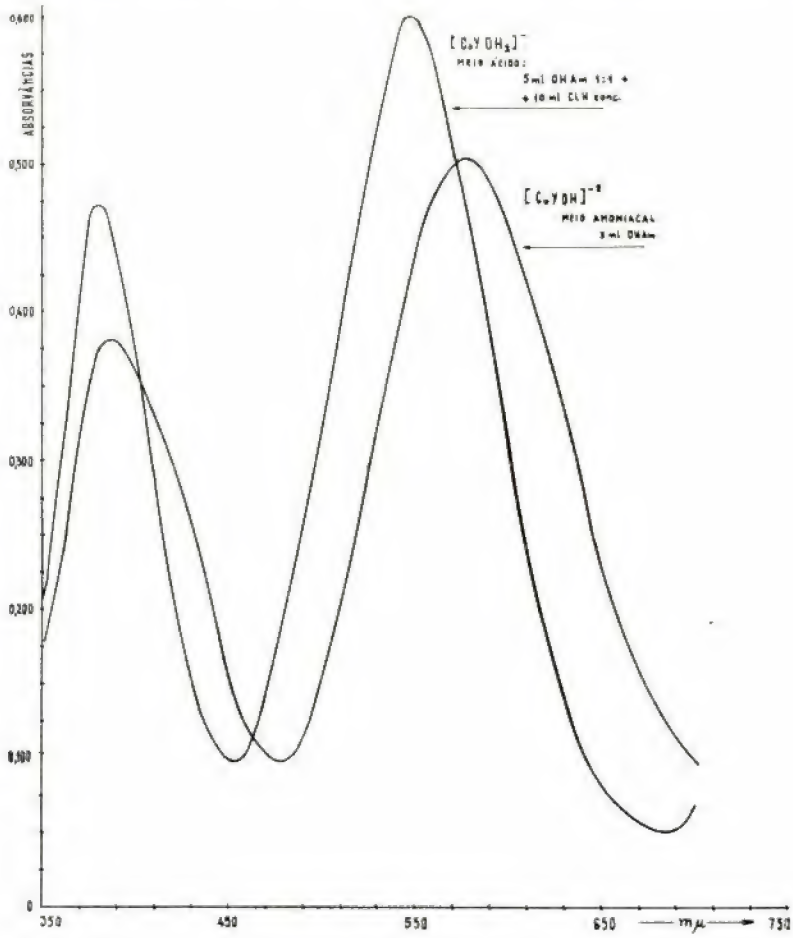


Fig. I

O segundo máximo (a cerca de 580 mμ, em meio amoniacal) é fácil de interpretar adoptando as conclusões de Schwarzenbach: corresponde à máxima absorção do complexo $[Co\ Y\ OH]^{-2}$ em meio amoniacal e $[Co\ Y\ OH_2]^{-}$ em meio ácido. Quanto ao primeiro máximo não encontrámos referência na literatura, mas estudando as curvas de absorção dos iões Co^{+} e Co^{+2} e seus complexos com NH_3 e EDTA (fig. II e III) conclui-se que ele corresponde provàvelmente ao ammino-complexo de Co^{III}. Parece pois que a cor

também verificámos, varia sensìvelmente com o pH. Por isso preferimos, para fins analíticos, empregar um excesso de amónia.

2 — Doseamento do cobalto

Com fundamento no estudo antecedente, fixou-se a seguinte técnica com a qual se traçou também o gráfico de aferição (Fig. IV).

1.º Tomar volume conveniente da solução a dosear (não mais de 25 ml contendo entre 1 e 15 mg de Co^{+2});

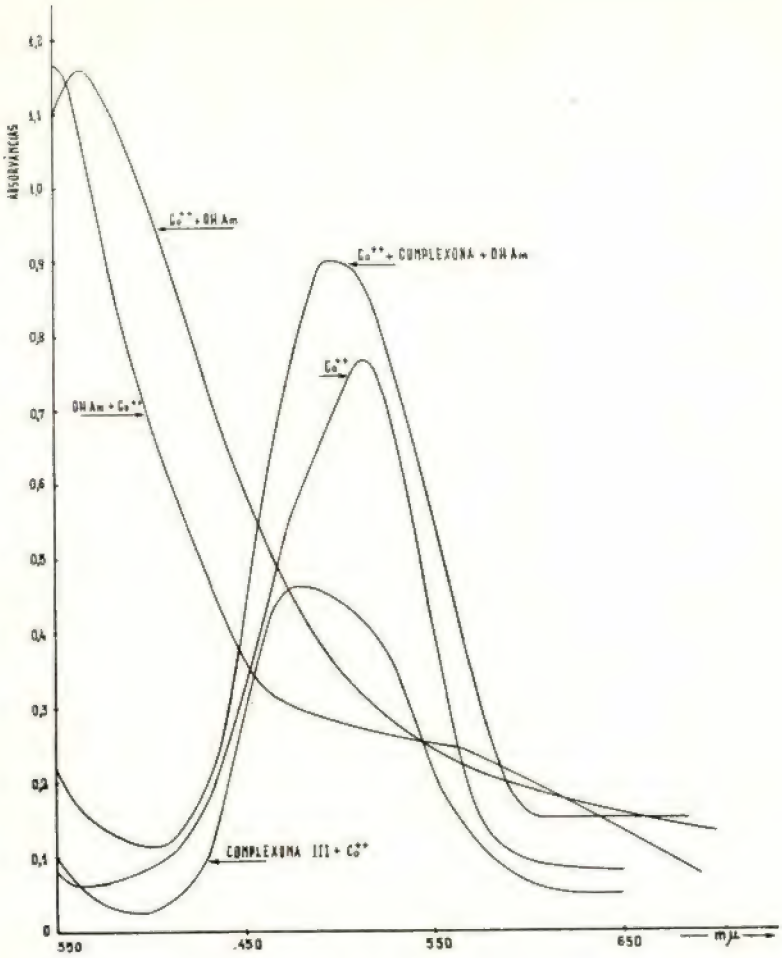


Fig. II

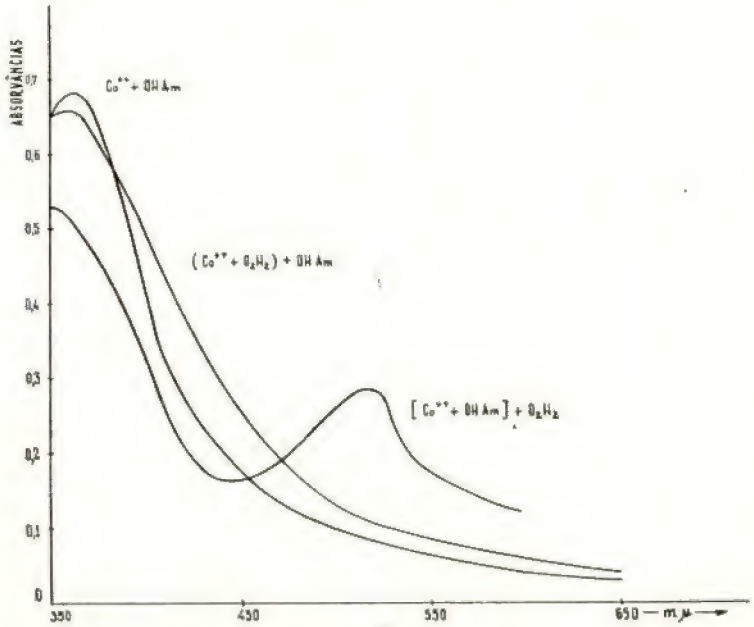


Fig. III

2.º Em balão aferido de 50 ml, juntar a essa toma 10 ml de solução 0,1 M de Complexona III, mais 4 ml de OHAm 1:1 e 5 ml de O_2H_2 a 3 %;

3.º Preencher o volume com água destilada e homogenizar;

4.º Esperar 5 minutos e ler a absorvância para $\lambda = 580$ m μ.

A curva padrão é feita, com a mesma técnica, a partir de solução de $(NO_3)_2$ Co. 6 OH_2, com cerca de 2 mg/1 de Co e prèviamente aferida volumètricamente com Complexona III (5).

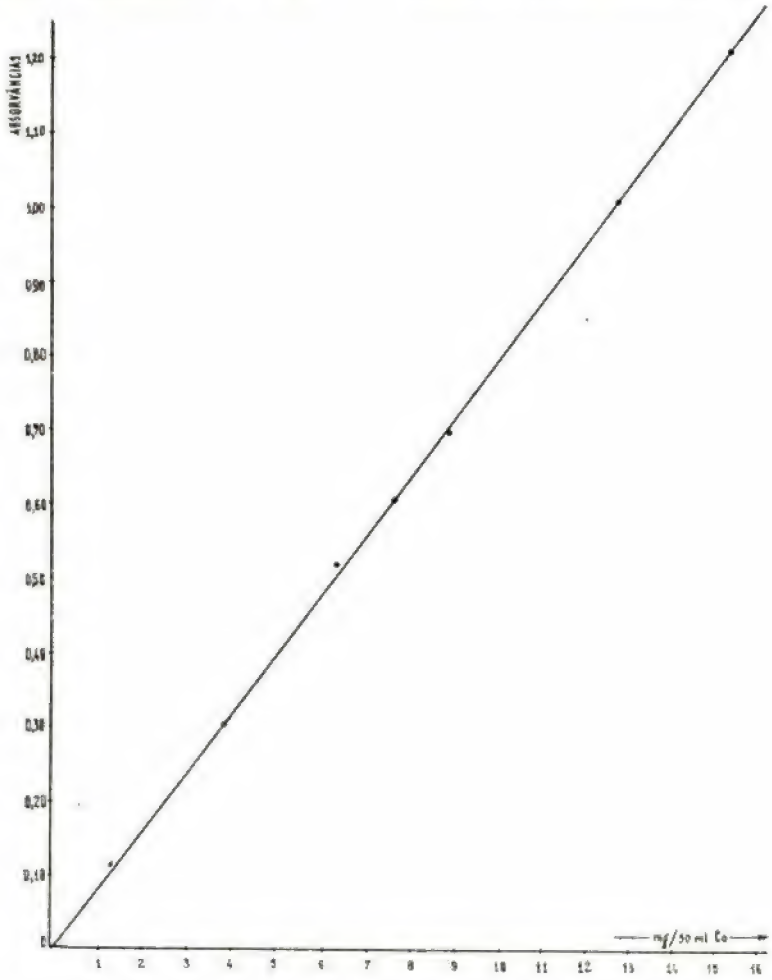


Fig. IV

Estabilidade e Interferências — A cor do complexo é estável, pelo menos durante 1 hora após a mistura dos reagentes.

A temperatura, entre 20 e 30º, não a afecta também sensìvelmente.

Interferem os iões com cor própria, o Fe e Ti que dão complexos corados nas mesmas condições e os que dão produtos de reacção còrados com a EDTA (Ni, Cu).

Os aniões SO_4^{-2} e F^- têm influência desprezável mesmo em concentração relativamente elevada, da ordem dos 100 mg/50 ml.

O autor confessa-se muito grato ao Ex.mo Sr. Professor Herculano de Carvalho pela sugestão deste estudo e pelos seus muitos e valiosos conselhos que nos permitiram levá-lo a bom termo.

Agradece igualmente ao colega Eng.º Cecílio Gracias a sua amável colaboração em alguns ensaios e úteis discussões dos diversos resultados.

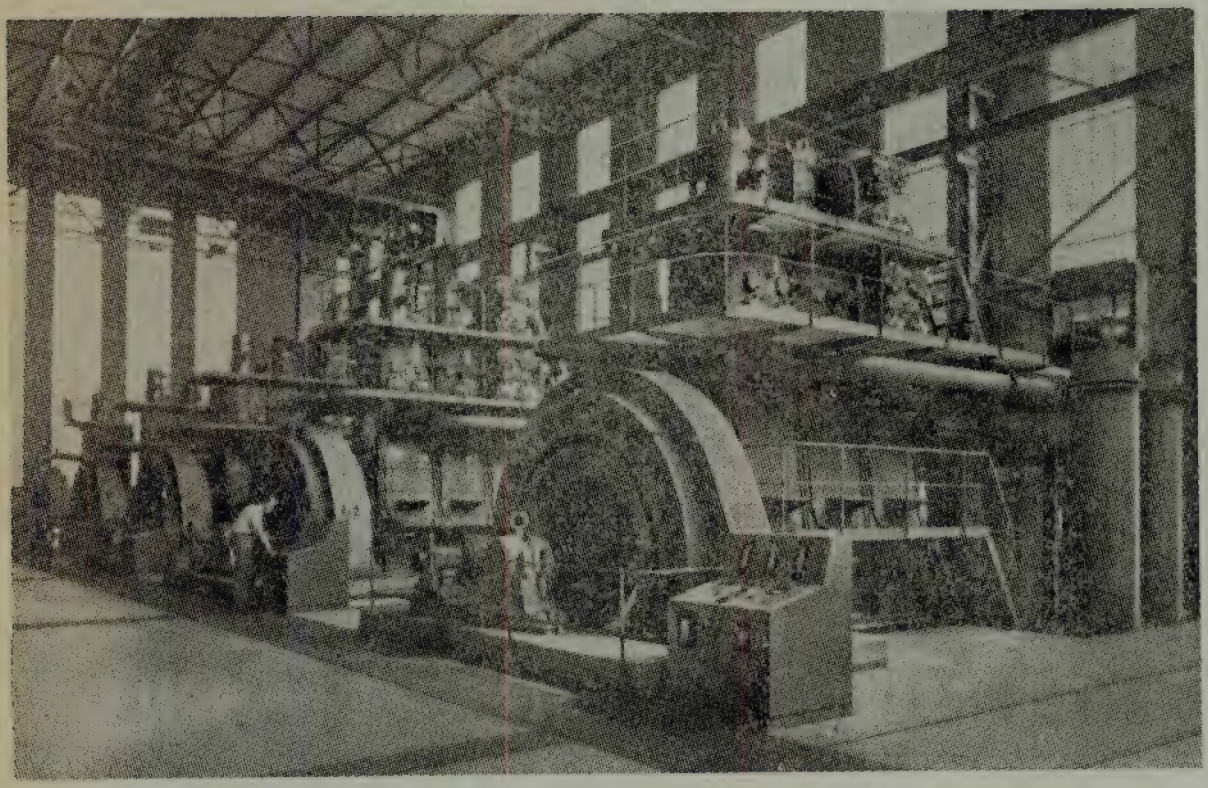
BIBLIOGRAFIA

1) — Zeit. f. an. Chem 154 (1957) pág. 290.
(2) — Colect. Czech. Chem. Comm. Fev. 1957. Pág. 242.
(3) — G. Schwarzenbach — Komplexone — XIII. Helv. Ch. Acta, XXXII (1949) pág. 839.
(4) — A. Ringbom — Metal-hidrogen peroxide — EDTA complexes and their uses in Analytical Chemistry. XV Congresso da União Internacional de Química Pura e Aplicada — Lisboa, Setembro, 1956.
(5) — H. Flaschka. Mikrochemie, 39 (1952) Pág. 38.

S. A. des Ateliers de Construction

Burckhardt

Bâle



AMONÍACO PORTUGUÊS, S. A. — Hipercompressor vertical de amoníaco, tipo C6 M 20, 2600 m³/h.

Compressores

Hipercompressores

Bombas de vácuo

Centrifugadoras

Representantes gerais

SOCOTEL, L.DA

Rua de Sá da Bandeira, 651 - 4.º Esq.

Tel. 27013 PPC **PORTO**

ELECTRO-ARCO
LIMITADA

ELECTRODIOS
POSTOS E ACESSORIOS
PARA A SOLDADURA ELECTRICA

MATERIAL APROVADO PELO
LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING

FÁBRICA E LABORATÓRIOS
VENDA NOVA — AMADORA
LISBOA
RUA SILVA CARVALHO, 239 — TEL 63649
PORTO
RUA DO BOLHÃO, 216 — TEL 21277

AVANCO L.DA
11 RUA IVENS 13
TELEF 20334-LISBOA

EQUIPAMENTOS para:

- indústria alimentar
- indústria farmacêutica
- indústria metalúrgica
- indústria química

CONSULTE OS NOSSOS SERVIÇOS TÉCNICOS E COMERCIAIS, SEM COMPROMISSO, SEMPRE QUE DESEJE ADQUIRIR EQUIPAMENTO INDUSTRIAL

Sociedade Avanço Limitada

OFICINAS E LABORATÓRIOS
DO
INSTITUTO SUPERIOR TECNICO

As oficinas pedagógicas do Instituto Superior Técnico, de CARPINTARIA DE MOLDE, de INSTRUMENTOS DE PRECISÃO e de ELECTROTÉCNICA, fornecem todo o género de material escolar e de demonstração para o ensino técnico. Nos laboratórios de QUÍMICA ANALÍTICA, FÍSICA INDUSTRIAL E DE MINERALOGIA executam-se análises para o público

Para quaisquer informações, dirigir-se ao secretário da comissão executiva

DO MUNDO TÉCNICO

REVISTA DAS REVISTAS

C. D. U. 546.77.222 : 621.892

Propriedades e aplicações do bi-sulfureto de molibdénio puro como lubrificante

Trabalho apresentado pelo Eng.º Alfred Sonntag, presidente de The Alpha Corporation, Greenwich, Conn., U. S. A. á American Society of Lubrication Engineers, em 16 de Março de 1953.

O bi-sulfureto de molibdénio, MoS_2, que pelo seu aspecto faz lembrar a grafite, é um mineral que fornece a principal matéria-prima para a obtenção do molibdénio. É no Colorado, U. S. A., que se encontram os maiores jazigos conhecidos de minério com uma concentração de MoS_2 suficiente para justificar a sua extracção comercial económica. Esse teor médio é de aproximadamente 0,5 — 1 %.

Na Fig. 1 vê-se um pedaço de minério típico e, à direita, uma pequena porção de bi-sulfureto de molibdénio.

Encontram-se também vestígios de MoS_2 em minérios de cobre, os quais, na última década, têm sido recuperados em quantidades bastante substanciais.

Nos últimos quatro anos, o MoS_2 natural tem resolvido um número cada vez maior de problemas difíceis de lubrificação. Experimentámos uma qualidade *sintética* do produto e verificámos que não tem qualquer valor como lubrificante.

Os cristais de MoS_2 são de forma hexagonal e cada um deles contém duas moléculas de bi-sulfureto de molibdénio.

A base do poder lubrificante do bi-sulfureto de molibdénio está precisamente na sua estrutura molecular inconfundível. Cada lâmina deste composto é formada por uma camada de átomos de molibdénio e por duas outras, de átomos de enxofre, uma de cada lado da primeira (Fig. 2-a). Uma destas duas camadas adere

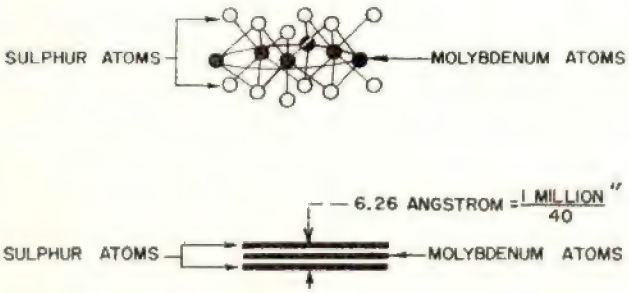


Fig. 2 — a) Estrutura da molécula de MoS_2 — b) esquema funcional da estrutura lamelar

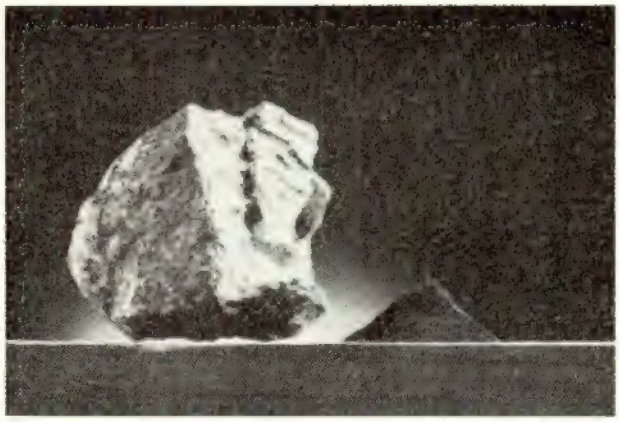


Fig. 1 — Minério típico de MoS_2, à esquerda. MoS_2 extraído, á direita

fortemente às superfícies metálicas e supomos que, para o efeito, contam as sólidas ligações atómicas entre o enxofre e o metal. A outra camada, que fica em contacto com camada análoga doutra molécula, desliza sobre ela fàcilmente, devido à fraca ligação enxofre-enxofre; teòricamente, esta ligação é fraca devido à distância, relativamente grande, a que os átomos de enxofre duma camada ficam dos da outra.

De momento que a estrutura molecular básica do MoS_2 conta para a sua função como lubrificante, o seu comportamento funcional pode ser visto com mais clareza por pessoas menos afeitas à Física, comparando a molécula de MoS_2 com... uma fatia de pão, com manteiga de ambos os lados (Fig. 2-b). O pão representaria os átomos de molibdénio, e a manteiga, os átomos de enxofre. Uma estrutura deste género tem tendência para se manter tombada e agarrada a uma superfície e, como a resistência da manteiga, ao corte, é fraca, a pilha de camadas que, como aquela em exame, se forme por sobreposição vertical, dará lugar a que as camadas deslizem lateralmente umas sobre as outras.

Como a espessura duma molécula é de 6,26 angström (1), ou seja, aproximadamente 1/40 dum milionésimo de polegada, um véu com a espessura dum milionésimo de polegada pode conter, teòricamente, 40 camadas moleculares com 39 planos de escorregamento ou de clivagem.

O bi-sulfureto de molibdénio é um pouco menos duro que a grafite; situa-se entre 1 e 1,5 da escala de Mohs.

(1) Calculado com dados da «Inorganic Chemistry»; de J. J. Mellor.

A sua densidade é de cerca de 5, isto é, aproximadamente duas vezes a da grafite.

Como o enxofre está combinado químicamente com o molibdénio, não reage com os metais como o enxofre livre.

Estabilidade química

Comparado com outros produtos, o MoS_2 puro tem estabilidade e inércia químicas absolutamente excepcionais. Não se dissolve em água fria ou em ebulição, nem em solventes, óleos minerais ou lubrificantes sintéticos. Resiste à acção de muitos ácidos, com excepção da água-régia, ácido clorídrico concentrado em ebulição, fluor e cloro. Em presença do oxigénio puro, oxida-se à temperatura ambiente.

Propriedades eléctricas

O bi-sulfureto de molibdénio não é magnético.

Alguns investigadores verificaram que o pó comprimido é bom condutor da electricidade, e outros, que a sua resistência eléctrica é elevada a potenciais baixos e diminui quando o potencial aumenta (Figs. 3

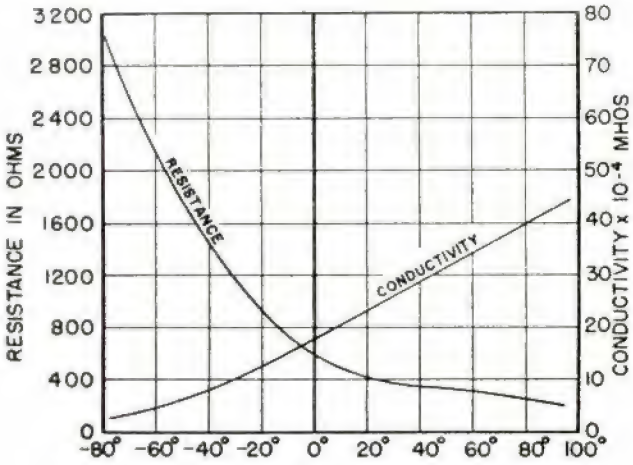


Fig. 3 — Resistência eléctrica e condutividade do MoS_2, seg. "Inorganic Chemistry", Vol. II, de J. J. Mellor

e 4). As referências que se encontram publicadas sobre o assunto, em geral, das propriedades eléctricas são muito escassas e confusas. Os desacordos notáveis que se verificam entre algumas delas provêm talvez das diferenças de qualidade das diversas amostras empregadas, as quais não foram tomadas em consideração.

Pureza

Nunca é de mais insistir sobre este ponto.

Enquanto que o conhecimento das propriedades lubrificante de MoS_2 data talvez de ano anterior a 1764, o certo é que as amostras de produto, suficiente e reconhecidamente puro, não se obtiveram comercialmente até cerca de 1948. Mesmo hoje, a designação de MoS_2 não dá a certeza de que o produto seja adequado para qualquer ou todos os fins da lubrificação. Todo o progresso neste campo tem sido prejudicado pelo facto de que, nas prateleiras de laboratórios e de casas de produtos químicos, podem estar rotuladas com «Bi-Sulfureto de Molibdénio», qualidades que contêm substâncias abrasivas, em percentagem que chega ser de 15 %. As especificações militares elaboradas para um tipo de MoS_2 destinado a lubrificação, não excluem a presença de matérias abrasivas. Por estes motivos, a Alpha Corporation, pioneira do aperfeiçoamento das qualidades comerciais do MoS_2 lubrificante, julgou essencial fazer a distinção dos seus produtos adoptando para os mesmos a marca *Molykote*. Se os leitores souberem, como nós próprios, quanto significa a palavra «pureza» no caso que nos ocupa, certamente não julgarão que seja necessário pedir desculpa por ter empregado a designação duma marca num trabalho técnico. Muitas possibilidades de utilização do MoS_2 estão ainda hoje encobertas pelas contrariedades encontradas com qualidades menos puras do produto.

Propriedades anti-corrosivas

Muito pouco se tem feito sobre este assunto.

Há alguns anos, fizemos nós mesmos experiências de exposição ao tempo fora de casa, com provetes de

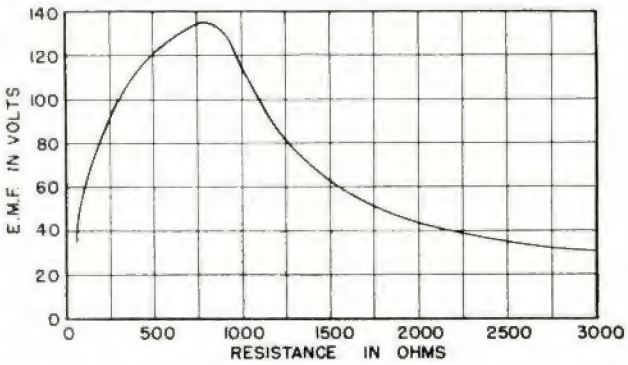


Fig. 4 — Efeito duma força electro-motriz na resistência eléctrica

aço, cobre, latão e alumínio, cobertos com um véu de MoS_2, obtido por meio de pó esfregado manualmente. Estas experiências levaram à desafortunada conclusão de que o MoS_2 não evita nem provoca a corrosão.

Atendendo ao facto de que o MoS_2 resiste à acção de todos os ácidos com excepção duns poucos, em forma concentrada, e, ainda, que a sua oxidação não é perceptível até temperaturas de 750 °F., o MoS_2 deveria dar protecção contra a corrosão, logo que com ele se obtivesse um véu tapado. Os resultados negativos acima referidos indicam simplesmente que o método manual de aplicação empregado não serve para a obtenção dum véu dessa natureza. Pode ainda concluir-se que as provas de corrosão podem ser usadas como meio de verificar se os véus formados são de boa qualidade.

Estabilidade Térmica

As propriedades lubrificantes do MoS_2 não são afectadas por temperaturas negativas e, em presença do ar, o produto é de aplicação prática até 750 °F. A oxidação no ar, a temperaturas ambientes, é tão lenta, que leva anos a tornar-se perceptível e, mesmo assim, só a camada de cima, exposta ao ar, é afectada. A oxidação só tem valores práticas a 750 °F. e aumenta com a elevação da temperatura até alcançar uma decomposição rápida a 1100 °F. O produto da decomposição no ar é o tri-óxido de molibdénio, que não tem propriedades lubrificantes e, consoante o tamanho das partículas, pode actuar como abrasivo. Em atmosferas inertes, as temperaturas de decomposição são consideràvelmente mais altas: já se encontraram valores da ordem dos 1600° — 2000 °F. no vácuo, e 2400° — — 2800 °F. em atmosfera de argon.

Coeficiente de atrito

W. E. Jominy, em recente artigo sobre o mecanismo do desgaste, faz esta afirmação clássica:

> « O mecanismo do desgaste, limitado aos metais, é um assunto formidável que tem sido investigado há muitos anos. É um fenómeno de tal forma complicado que quase todas as conclusões que lhe dizem respeito tanto podem ser verdadeiras como falsas, tudo dependente de outras complicações»,

Esta afirmação, em grau talvez menos desesperado, aplica-se igualmente bem ao problema da previsão dos coeficientes de atrito, relativos às condições de lubrificação limite.

Provàvelmente, a razão principal para as variações, bastante extensas, que a Fig. 5 mostra, está na variação da densidade e da espessura dos véus de MoS_2 formados sobre as superfícies. A geometria dos provetes usados por Boyd e Robertson para obter os resultados da curva 4 leva a esta suposição, porque esses provetes prestam-se à formação de véus fortes e uniformes. As superfícies utilizadas na prova foram dois planos, de pequeno diâmetro, de aço cromo-níquel endurecido a Rockwell C. 63.

Estes dois planos foram rodados um sobre o outro. O acabamento das superfícies foi feito por polimento a 2 RMS micro-polegadas e o MoS_2 foi abundantemente depositado entre as superfícies em presença. Os resultados obtidos devem representar, com muita aproximação, a resistência ao corte do próprio MoS_2.

Métodos de Aplicação

Paralelamente ao MoS_2 sob a forma de pó fino, fabrica-se actualmente uma grande variedade de massas consistentes e suspensões coloidais ou quase coloidais em óleo mineral, em líquidos lubrificantes sintéticos ou em solventes.

Há muitas esperanças em chegar a métodos de formação de coberturas perfeitamente aderentes às superfícies, sem o emprego de produtos intermediários. O esfregar do pó, manualmente, numa superfície a lubrificar, forma um véu que serve para muitos fins, mas o contacto estreito que é necessário realizar para

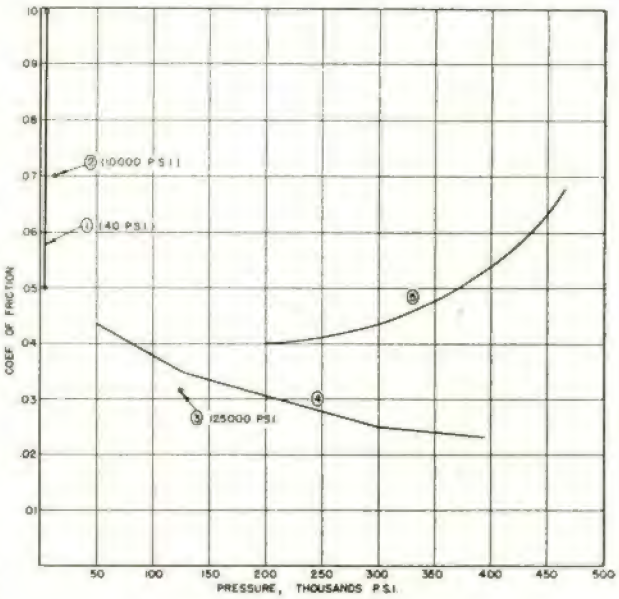


Fig. 5 — Coeficientes de atrito:

1 — atrito de descolagem — 40 lb./pol. 2. — Pó de MoS_2 e MoS_2 com líquidos, várias combinações de metais (Bureau of Standard Journal of Research, Vol. 46, 1951).

2 — 10.000 lb./pol. 2 — Experiências de montagem à prensa com MoS_2 (Molykote Tipo Z) à veloc. de 6 pol./min — Superfícies de aço endurecido e polido (A. Sonntag "Iron Age", 8-2-51).

3 — Silicone com MoS_2, 18 e 50 % em peso — 125.000 lb./pol. 2. — coeficiente constante para veloc. de 1000 a 16000 pés/min. (Publ. de Climax).

4 — Superfície de aço endurecida (63 C) trabalhadas a 2 RMS micro pol. — velocidade muito lenta (1/2 rpm. — provete de pequeno diâmetro (Boyd e B. P. Robertson, Transactions A. S. M. E., Jan. 1945.

5 — Experiências de trefilagem de arame de aço ao carbono 0,53 com pó MoS_2 (Molykote Tipo Z) e arame recoberto de cal. A curva representa 16 passagens a fieiras sucessivas, à veloc. de 1,64 pés/seg. (Comun. partic. de Max Plank Institute, Düsseldorf, Alemanha).

a perfeita aderência, só vem a dar-se, com esse método, nas cristas da superfície. Sabemos por experiência própria que o esfregar do pó, fortemente, com meios mecânicos, o uso de prensa ou de outros dispositivos para rolar as peças em pó contribuem para uma aderência mais uniforme e efectiva. As acções mecânicas deste género pisam ou comprimem o material, obrigando-o a um contacto mais íntimo nas cavidades da superfície, ao mesmo tempo que dela expulsam as bolhas e chochos gasosos. Há indicações de que o emprego de calor contribui para uma aderência maior.

A aplicação de massas consistentes, homogéneas e com alto teor de MoS_2, às superfícies a lubrificar, seguida de rodagem, por curtos períodos de tempo, produz geralmente revestimentos de fraco atrito, à

prova de gripagem. Depois da rodagem, deve remover-se e excesso de produto por meio de solventes ou com os habituais métodos de desengorduramento, se se pretender uma lubrificação seca. Experiências de atrito demonstram que limpezas gerais repetidas, com qualquer tipo de solvente, não destroem o véu básico de MoS_2. Para tirar qualquer vestígio do produto, têm sido usados métodos abrasivos ou um processo de limpeza que compreende a decapagem com aço muriático.

Um composto de muito sucesso para obter revestimentos como aqueles acima referidos é o *Molykote Tipo G*. Este produto contém 70 % em peso de MoS_2 puro, um óleo mineral e um estabilizador. A área total das partículas de MoS_2, neste composto, foi aumentada, diminuindo o tamanho delas a um ponto tal que o óleo em jogo cobre as partículas com uma película tão fina que a mais leve acção de esfregar é suficiente para produzir o contacto físico das partículas de MoS_2 com a superfície. O facto tem a sua importância para certas aplicações práticas. Se supusermos um óleo ou massa, nos quais as partículas de MoS_2 estiverem cobertas por uma película líquida o efeito de qualquer acção mecânica será o de as remover ou deitar fora. O líquido pode molhar a superfície, mas as partículas sólidas são varridas sem com ela terem contactado.

Nas montagens à prensa, por exemplo, são absolutamente ineficazes os compostos lubrificantes à base de MoS_2 que dêem origem a películas líquidas espessas em volta das partículas de MoS_2.

Uma coisa a ter sempre em mente é o facto de que o MoS_2 é feito de partículas sólidas. Estas partículas de nada servem se estiverem no meio duma película líquida ou na sua superfície livre; pelo contrário, as partículas sólidas têm que ter a oportunidade de alcançar a superfície a lubrificar e com ela entrar em contacto íntimo.

Um *exemplo interessante* da eficácia dum véu formado por meios mecânicos é o caso dos resultados obtidos em chumaceiras de esferas, de precisão, destinados a instrumentos de laboratório, nas quais foi possível reduzir o atrito de 1/5 do normal.

As experiências foram feitas com uma balança de braços iguais, para 5 lb. de carga, com os eixos apoiados em 6 chumaceiras de esferas, de precisão (Fig. 6). O centro de gravidade dos braços ficava ligeiramente

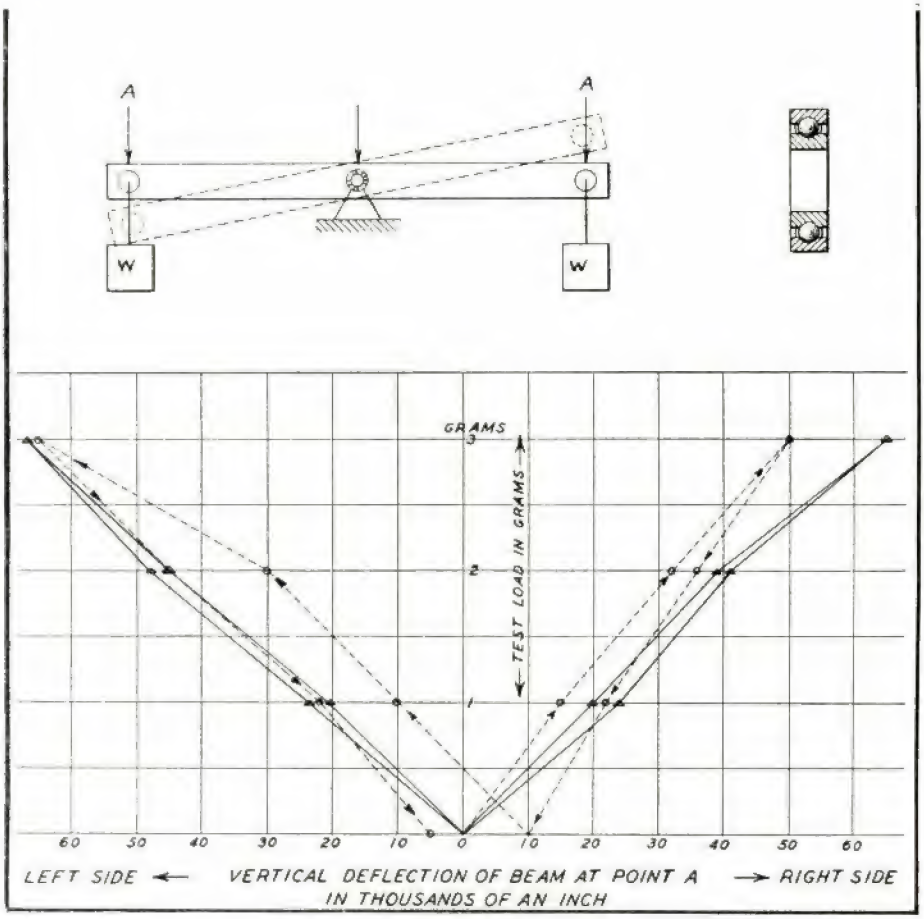


Fig. 6 — Chumaceiras de esferas tratadas com Molykote (canto superior direito), com 1/8'' de diâmetro interior. Redução substancial do atrito, na pesagem com uma balança de braços iguais (canto superior esquerdo). Resultados com as chamuceiras não tratadas, a tracejado; com as chumaceiras tratadas com Molikote, a cheio

abaixo do eixo central, o que permitia registar pequeníssimos acréscimos de carga, medindo o desvio dos braços em relação à sua posição horizontal.

A sensibilidade aos pequenos acréscimos de carga diminui com o aumentar da carga nas chumaceiras, o que é natural, visto que o atrito de escorregamento aumenta, quando as superfícies de apoio das esferas se deformam elàsticamente sobre as mesmas esferas afastando-se cada vez mais do caso típico de atrito de rolamento verdadeiro. (Fig. 7)

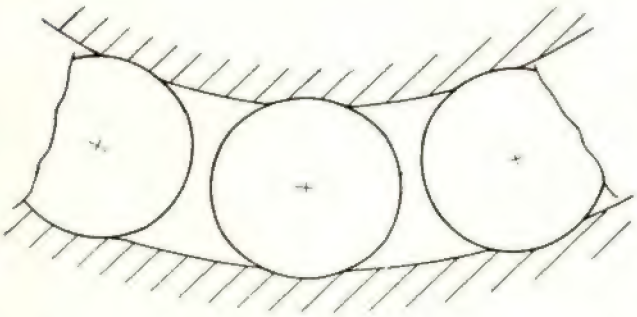


Fig. 7 — O desenho mostra exageradamente a deformação elástica das faces de apoio dos anéis e das esferas ou rolos submetidos a carga. Atrito de escorregamento nas áreas deformadas, aumentando com a carga, a velocidades baixas. A experiência mostra que as películas de lubrificante líquido não se mantêm ou são ineficazes

Geralmente estas chumaceiras de esferas são limpas com solventes para lhes tirar todo o óleo ou gordura que, neste caso, não reduz o atrito, mas muito simplesmente serve de freio, com influência na precisão da medida e na sensibilidade do instrumento.

Na experiência da Fig. 6, os braços foram equilibrados com pesos de 5 lb., aplicados em cada um dos eixos dos extremos. Juntaram-se ao eixo da direita pesos de 1, 2 e 3 gramas, depois esses pesos foram retirados e postos no eixo da esquerda. As leituras dos desvios em relação à horizontal foram feitos no ponto A, em divisões de milésimo de polegada. As setas indicam o sentido da carga.

Os resultados obtidos com as chumaceiras usuais estão representados, na figura, com linha tracejada, que, como se vê, tem, no «zero», um afastameuto de 15 divisões. As linhas cheias correspondem aos resultados com as chumaceiras tratadas com Molykote da seguinte forma: lavaram-se as chumaceiras com solvente, como usualmente; aplicou-se Molykote G às faces interiores dos anéis; puseram-se as chumaceiras a rodar, a 2500 rpm., durante um minuto; e finalmente as chumaceiras voltaram a ser lavadas em solvente. Desta forma, as chumaceiras ficaram completamente secas, mas com as superfícies de apoio impregnadas com um fino véu de bi-sulfureto de molibdénio. O resultado deste tratamento foi imediatamente reconhecível, comparando a duração da rotação, mesmo à mão.

Os resultados destas experiências são especialmente interessantes, porque os melhoramentos obtidos foram de tão grande extensão. Não houve afastamento do «zero» e o erro devido ao atrito, ao pesar as 5 lb., foi reduzido de 1 em 3000 para cerca de 1 em 15 000.

Num outro caso, empregou-se também a mesma massa G, em vez de óleo fino, em duas chumaceiras de esferas duma turbina a ar, em miniatura, e a velocidade máxima possível subiu de 85.000 rpm. para 135.000 rpm.

Estão-nos chegando informações de que o emprego do Molykote G nas chumaceiras de esferas de laminadores deu como resultado, abaixamentos sensíveis das temperaturas dessas chumaceiras, principalmente durante o período de rodagem.

Há resultados de outras experiências que permitem concluir que o MoS_2, reduzindo o atrito de escorregamento nos casos de pressões de apoio extremas, como aquelas que se manifestam sob esferas e rolos carregados, efectivamente eleva de valor as temperaturas a que se dá a ruptura das películas dos óleos lubrificantes, reduzindo o calor de atrito fortemente concentrado, que é o verdadeiro responsável pela ruptura do lubrificante, aos farrapos, em quantidades mínimas de cada vez.

Entre outras aplicações importantes do *Molikote Tipo G*, contam-se as engrenagens abertas fortemente carregadas, veios estriados, fusos, engates e, duma forma geral, peças com movimento alternativo que tenham tendência para gripar, colar, riscar ou oferecer desgaste excessivo. Os melhoramentos obtidos nestes casos têm sido bastantes notáveis. As peças podem ser deixadas muito mais tempo sem serem de novo lubrificadas e em alguns casos, mesmo, uma só aplicação dá para toda a vida do equipamento.

Conclusões

1. O MoS_2 natural e puro é um lubrificante sólido para pressões extremas, cuja eficácia, em comparação com outros lubrificantes, aumenta com o aumentar da pressão, e chega a fazer a lubrificação a pressões de mais de 400.000 lb./pol.^{2}, ou seja, bastante superiores aos valores do limite de elasticidade aparente de qualquer metal.

2. A sua função, como lubrificante, é independente da temperatura, entre limites de, pelo menos, — 90° F. e + 750° F., e mesmo de temperaturas mais altas, fóra do contacto do ar. Tem uma estabilidade química notável.

3. A experiência mostra que o MoS_2 tem afinidade para aderir às superfícies metálicas. A eficácia final do MoS_2 parece depender dos métodos utilizados para se obter a aderência uniforme e sólida à superfície a lubrificar. A finalidade é formar uma camada de moléculas de MoS_2, que não fiquem separadas umas das outras nem da superfície a lubrificar, por películas líquidas ou gasosas.

4. Como lubrificante sólido, serve com sucesso:

a) Sempre que as películas líquidas não possam manter-se por razões de frio ou de calor;

b) nos ambientes poeirentos em que as peliculas líquidas são inconvenientes

c) sempre que a espessura das peliculas líquidas possam interferir com a precisão duma medida, por exemplo, em aparelhagem óptica e nos instrumentos de laboratório — já foi possível trabalhar com folgas nulas e negativas entre superfícies, sem que as mesmas gripassem ou se pegassem;

d) nos casos em que, por deterioração das películas líquidas, se formam resíduos gomosos que alteram o funcionamento regular de certos mecanismos.

5. O MoS_2 ou os produtos lubrificantes à base de MoS_2 são usados com êxito, quando a presença de pressões extremas dê origem a gripagens, colagens ou desgastes exagerados das superfícies lubrificadas; nos casos de peças com movimento alternativo, em que seja difícil manter a lubrificação com líquidos ou se tema que elas se colem; na lubrificação de superfícies de materiais semelhantes, como aço inoxidável com aço inoxidável, etc.; como aditivo EP. para outros lubrificantes, incluindo os silicones e lubrificantes qué não possuem qualidades de EP.; na lubrificação da borracha natural e sintética; como aditivo de óleo para ferramentas de corte ou de produtos usados no enforme a frio.

BIBLIOTECA
FICHEIRO

Classificadores responsáveis:

José F. da Silva Pinharanda, Alexandre Gomes Cerveira, Carlos Ramalho Carlos, Alberto Esteves Guerra, Mário da Rocha Frazão, Guilherme Francês Correia e Arménio de Oliveira Faria

---

Recortar as indicações bibliográficas que formam uma ficha e estão encimadas por CDU (Classificação Decimal Universal).

Colar cada referência num pequeno rectângulo de cartolina de 75 × 125 mm.

Ordenar pelos índices decimais, *começando da esquerda para a direita,* independentemente do número de algarismos que o índice contiver, e respeitando a seguinte regra de arrumação dos sinais auxiliares:

+ / n.os simples : [ ] = (01/09) (1/9) (=) " "A/Z — .0 . .00

Consultar, em casos duvidosos, a exemplificação inserida na «Técnica» n.º 218 e seguintes, ou recorrer à Biblioteca da A. E. I. S. T.

Notar que a inserção das fichas nesta publicação respeita a ordem correcta, no intuito de a esclarecer o mais possível.

A comodidade de possuir no próprio local de trabalho um arquivo ordenado e de fácil consulta sobre assuntos que se sabe onde existem, é uma das evidentes vantagens de um ficheiro classificado segundo a CDU.

Os assuntos de que estas fichas são referência ficam patentes à consulta a partir desta data.

LIVROS

C. D. U. 624.053 : 539.319

«Razón y ser de los tipos estructurales» — *E. Torroja* — 391 pág.

Editado pelo Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento, recebemos a «Razón y ser de los tipos estructurales», de *Eduardo Torroja*, 1.ª edição (1957).

Nesta obra não se trata dos métodos de cálculo dos diferentes tipos de estruturas.

Apenas se indicam as características gerais desses tipos, as razões fundamentais que os determinam e as bases a ter em conta no problema da sua escolha, ou seja, as directrizes que devem guiar o projectista no seu trabalho inicial.

Explica ainda as propriedades dos materiais, os estados de tensão que aparecem, os processos de construção mais convenientes, não fazendo, contudo, comparação de custos.

Em resumo, este livro pode-se considerar valioso e interessante auxiliar dos conhecimentos adquiridos.

O aspecto gráfico é excelente e a apresentação, em grande formato, óptima.

C. D. U. 624.154/.155

«Estacas para fundações» — *Fernando Vasco Costa* — 223 + 66 páginas.

Editada pelo Departamento de Publicações do Centro Académico Horácio Lane, da Escola de Engenharia Mackenzie (São Paulo, Brasil), recebemos «Estacas para fundações, de *Vasco Costa* (1956).

Constitui a 2.ª edição, melhorada e ampliada, da obra que já se encontrava esgotada e tinha sido publicada pelo Centro de Estudos de Engenharia Civil (L. N. E. C.)

Dela faz parte um anexo para a determinação de centros de gravidade de trapézios e um valioso vocabulário de Mecânica dos Solos, Inglês-Português e Português-Inglês.

C. D. U. 308:63 (469)

I curso de sociologia rural — *Vários.*

J. U. C. de Agronomia, 1956, vol. 1, págs. 90.

C. D. U. 526.9 : 518.5

Uso da régua de cálculo «Universal» para grandes distâncias e pequenos ângulos — *Agostinho Ferreira Gambetta.*

Sindicato Nacional dos Engenheiros Geógrafos, 1945, vol. 1, págs. 8.

C. D. U. 551.491.4 (679)

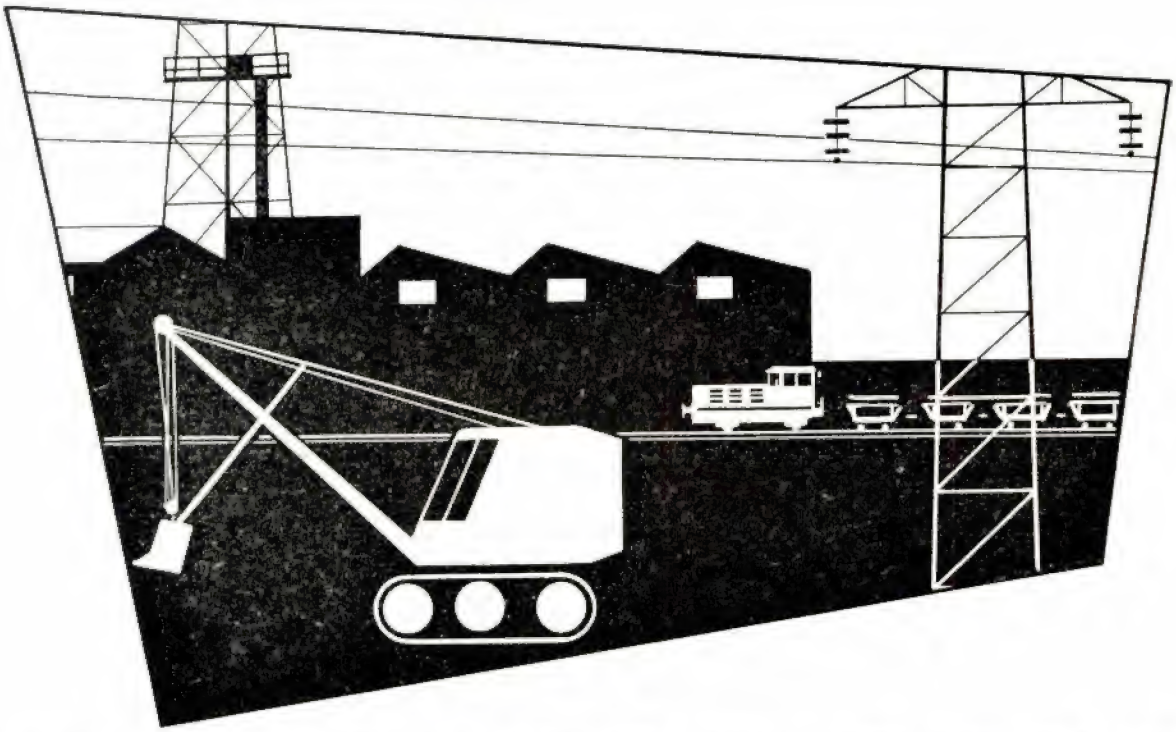
Comparação entre a Geoquímica das águas subterrâneas e dos riolitos do sul do Save e as águas subterrâneas dos complexos graníticos do Niassa oriental — *V. L. Bosazza + J. A. Cruz Rodrigues.*

Bol. da Soc. Estudos Moçambique (separata de) 1945, vol. 1, págs. 45.

C. D. U. 620.18

A metalografia — Métodos e aplicações — *Antera Valeriana de Seabra.*

L. N. E. C., Lisboa, 1956, vol. 1, págs. 16.



MERCEDES-BENZ

MOTORES INDUSTRIAIS DIESEL

MOTORES PARA TODAS AS APLICAÇÕES INDUSTRIAIS
FAMOSOS EM TODO O MUNDO PELA SUA GRANDE ROBUSTÊS. ECONOMIA
DE CONSUMO E FACILIDADE DE MANUTENÇÃO
MODELOS DESDE 15 A 2.500 H. P.

EM ARMAZÉM:

MODELO M B 841 B	25 H. P. — 1.000 R. P. M.
MODELO M 202 B	55 H. P. — 1.200 R. P. M.
MODELO M 203 B	90 H. P. — 1.200 R. P. M.
MODELO M 204 B	120 H. P. — 1.200 R. P. M.

OUTROS MODELOS PARA ENTREGA MUITO RÁPIDA.

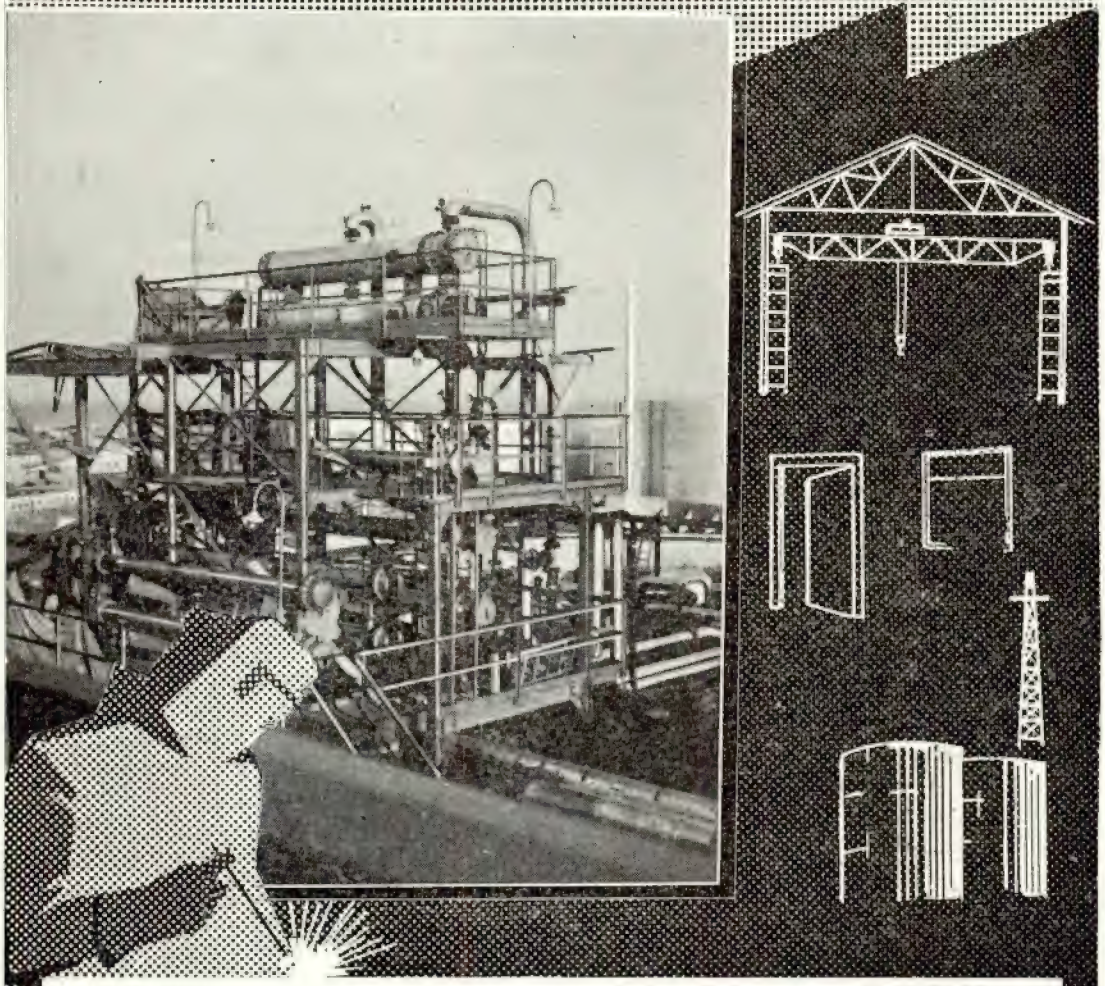
MOTORES A 4 TEMPOS - ARREFECIMENTO POR ÁGUA
ARRANQUE A AR COMPRIMIDO OU ELÉCTRICO

REPRESENTANTES C. SANTOS LDA. — DIVISÃO MARÍTIMA E TÉCNICA

29, AV. DA LIBERDADE, 41 — LISBOA
160, R. DE S.TA CATARINA, 168 — PORTO

FÁBRICA METALURGICA E CONSTRUTORA

CARAVELA, L.DA



CONSTRUÇÃO E SERRALHARIA CIVIL • ESTRUTURAS METÁLICAS
PONTES E POSTES METÁLICOS • CAIXILHARIA E PORTÕES
PONTES ROLANTES • SERRALHARIA ARTÍSTICA • CALDEIRARIA
SOLDADURA ELÉCTRICA • GALVANOPLASTIA • RADIADORES

CARAVELA L.DA

AV. INFANTE D. HENRIQUE — TALHÃO 10

TELEFONES 399008 — 399480

CABO RUIVO — LISBOA PORTUGAL

C. D. U. 621.436 (021)

Diesel engine manual — *F. Holloy.*
George Newnes, 1955, vol. 1, págs. 207.

C. D. U. 624.13

Curso de Mecânica de Solos — *Vários.*
Ordem dos Engenheiros, 1955, vol. 553.

C. D. U. 66 (4)

L'Industrie Chimique en Europe.
O. E. C. E., Paris, 1956, vol. 1, págs. 217.

ARTIGOS DE REVISTAS

C. D. U. 330.191.5 (469 — 5)

Em torno do condicionalismo e das perspectivas da da nossa economia ultramarina — *Ulpiano da Fonseca. Nascimento.*
Revista de Economia, 12-956, vol. 9, n.º 4, pág. 177-182

C. D. U. 330.191.6

Panorama (económico) Internacional.
Revista de Economia, 12-956, vol. 9, n.º 4, pág. 189-191.

C. D. U. 330.191.6 «1956»

Panorama Internacional.
Revista do Economia, 9-956, vol. 9, n.º 3, pág. 129-132.

C. D. U. 331.88 : 33 — 057

A profissão de Economista e as Corporações — *Vergilio Moreira.*
Revista de Economia, 12-956, vol. 9, n.º 4, pág. 183-187.

C. D. U. 532.591

Propagation et réflexion d'ondes de translation abruptes en eau tranquille de profondeur régulièrement décroissante — *G. D. Rausford.*
La Houille Blanche, 2-8-956, n.º 3, pág. 404-409.

C. D. U. 534.1 : 624.2/8

Brückenschwingungen unter Verkehrslasten (Vibrações nas pontes sob a acção de cargas móvois) — *Bruno Brückmann (Munique).*
Publ. Preliminar de Ass. Internacional de Pontes e Estruturas, 1956, pág. 181-197.

Resumo em português.

C. D. U. 534.838 : 624.042.700.13

Statiscal estimate of seisemic loading (Precisão estatística de solicitações sinuosas) — *Ferry Borges (Lisboa).*
Publ. Preliminar de Ass. Iuternacional de Pontes e Estrnturas, 1956, pág. 173-179.

Resumo em português.

C. D. U. 535.822.6

L'emploi du microscope de polarisation — *Horst Piller.*
Zeiss — Bulletin Technique, 12-955, vol. 3. n.º 18, pág. 106-108.

C. D. U. 535.822 6 : 549.12 : 545

Analyse quantitative des cristaux et des agrégats cristallins par la microscopie optique — *Rudolf Mosebach.*
Zeiss — Bulletin Technique, 6-955, vol. 3, n.º 16, pág. 43-48.

8 referências bibliográficas.

C. D. U. 539.17 (81)

Energia nuclear no Brasil — *Bernardino Corrêa de Mattos.*
Revista do Clube de Engenharia, 7-956, n.º 239, pág. 19-26.

C. D. U. 539.219.2 : 624.624

Bemessury der Eisenbahnbrücken in Stahlbeton veit Rücknicht auf die Einschränkury der Rissbildury — *F. Szépe (Budapeste).*
Publ. Preliminar de Ass. Internacional de Pontes e Estruturas, 1956, pág. 843-855.

Referências bibliográficas.

C. D. U. 539.319 : 624.07

Das verbalten von trajwerken im phasenraum (Comportamento das estruturas nas diversas fases de equilíbrio) — *Zormayr Migirdcyan (Dusseldorf).*
Publ. Preliminar de Ass. Internacional de Pontes e Estruturas, 1956, pág. 137-143.

Resumo em português.

C. D. U. 539.373

Étude des phénomènes de déformation élastique revêtant l'apparence plastique avan fissuration (Estudo dos fenómenos de deformação elástica de aparência plástica antes da fissuração) — *V. Guyon (Paris).*
Publ. Preliminar de Ass. Internacional de Pontes e Estruturas, 1956, pág. 931-942.

Resumo em português.

C. D. U. 539.374 : 691.532

Creep and creep recovery of cement mortar (Fluência de uma argamassa de cimento e sua recuperação) — *Staffan Bäckström (Estocolmo).*
Publ. Preliminar de Ass. Internacional de Pontes e Estruturas, 1956, pág. 77-82.

Resumo em português.

C. D. U. 539.383 : 624.058.5

Recherche théorique et expérimentale des surtensions, résultant de l'ovalisation, dans un tuyau sollicité sur deux génératrices opposées — *André Paduart.*
Acier Stahl Steel, 4-956, n.º 4, pág. 176.

ATLANTIC
UMA TINTA
PARA CADA FIM
FABRICA LUSITANA
DE TINTAS E VERNIZES
LIMITADA
FUNDADA EM 1917

C. D. U. 539.561 : 539.219.2

Der Zusammenlany zurischen Rissbildury und Haftfestigkeit unter besonderer Berücksichtiguny der Anwendung hober stablspannunger — *H. Rüsch (Zurique).*

Publ. Preliminar de Ass. Internacional de Pontes e Estruturas, 1956, pág. 791-812.

Resumo em Português «Relação entre a fissuração e a aderência considerando tensões elevadas no aço».

C. D. U. 543.712 : 69

New aid to discovery of dampness.

Building Materials, 5-8-956, vol. 16, n.º 8, pág. 343.

C. D. U. 545 : 621.317.39

Analise conductimetrica con el puente de medida de lectura directa tipo G. M. 8536 — *M. Haase.*

Philips, 1955, vol. 2, pág. 1-5.

C. D. U. 549.12 : 545 : 535.822.6

Analyse quantitative des cristaux et des agrégats cristallins par la microscopie optique — *Rudolf Mosebach.*

Zeiss — Bulletim Technique, 6-955, vol. 3, n.º 16, pág. 43-48.

8 referências bibliográficas.

C. D. U. 551.351.001.57

Les transports littoraux sur les plages de galets. Application au port des Galets à l'île de la Réunion — *P. Lhermitte* et *J. Germain.*

La Houille Blanche, 9-955, n.º 8, pág. 658.

Indicações bibliográficas.

C. D. U. 551.465

A propos de l'amortissement des houles dans le domaine de l'eau peu profonde.

La Houille Blanche, 12-956, n.º 6, pág. 843.

C. D. U. 551.465

Amortissement des houles dans le domaine de l'eau per profonde — *R. Miche.*

La Houille Blanche, 11-956, n.º 5, pág. 726.

11 referências bibliográficas.

C. D. U. 551.465.001.57

Essais effectués sur un amortisseur de houle de modéle réduit.

La Houille Blanche, 11-956, n.º 5, pág. 748.

C. D. U. 551.468.1 (679 — 13)

The Geology and the development of the bays and coastline of the Sul do Save of Moçambique — *V. L. Bosazza.*

Boletim da Soc. Estudos de Moçambique, 5-6-956, vol. 26, n.º 98, pág. 19-28.

13 referências bibliográficas.

C. D. U. 553.251.2

Les élements en traces en Pétrogenèse et en Métalogenèse—Mise au point a l'aide de la litterature recente *Jean Lombard.*

La Chronique des Mines d'Outre-Mer, 2-957, vol. 25, n.º 248, pág. 39-48

46 referências bibliográficas.

C. D. U. 553.441 (469) : 550.42

Considerations sur la géochimie de blendes et de galénes portugaises — *J. M. Cotelo Neiva.*

Estudos, Notas e Trabalhos do S. F. M., vol. 11, n.º 3-4, pág. 204-238.

C. D. U. 553.48

Sur la géochimie et les gisements du nickel — *Jean Lombard.*

La Chronique des Mines d'Outre-Mer, 10-956, vol. 24, n.º 244, pág. 237-256.

C. D. U. 553.495 (72)

Uranium: Courtesy of Anaconde — *Ray Day.*

Excavating Engineer, 9-956, pág. 30.

C. D. U. 553.55 : 552.54 (469.5 — PORTEL)

Calcáreos cristalinos da região de Portel — *João Martins da Silva.*

Estudos, Notas e Trabalhos do S. F. M., vol. 11, n.º 3-4, pág. 185-203.

C. D. U. 621. — 272

Molas múltiplas helicoidais em arame redondo, para compressão.

Engenharia — Porto, 1-956, vol. 11, n.º 20, pág. 34-36.

C. D. U. 620.17

Buckling of Stressed bars of Heterogeneons Materials (Flambage de barres comprimées) — *P. Csonka.*

Acta Technica, 195, vol. 11, n.º 3-4, pág. 391.

C. D. U. 621.32

Le nouvel éclairage des Champs-Elysées.

Electricité, 7-8-956, 40e année, n.º 229, pág. 185-187.

C. D. U. 621.34 : 621.9

La commande Leonard appliquée aux grosses machines-outils — *Steinebruner, M. et A. Schenkel.*

Rev. Brown Boveri, t. 43 (1956), n.º 5, pág. 136 a 146.

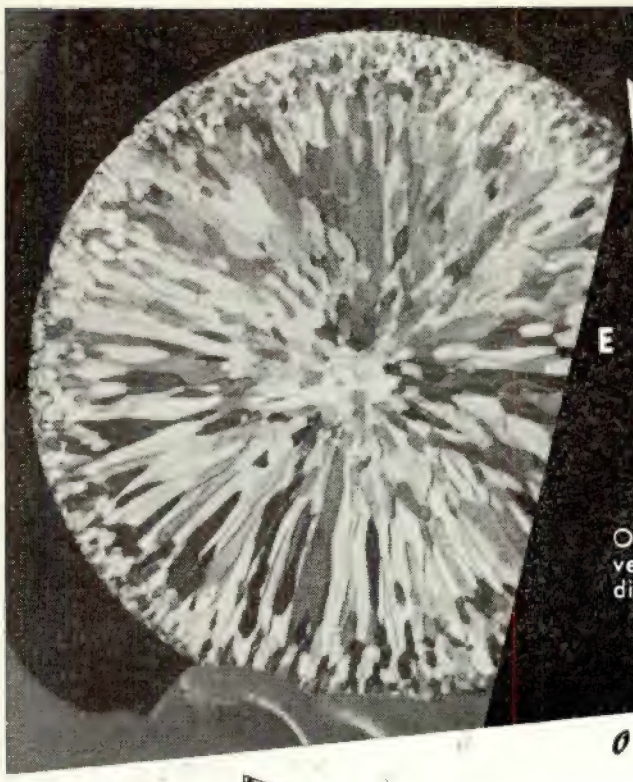
16 fig., 3 réf. bibliogr.

C. D. U. 621.34 : 677.052.24

L'entraîment électrique individuel des bancs à broches — *Steffen, O. R.*

Rev. Brown Boveri, t. 43 (1956), n.º 5, pág. 153 a 155.

4 fig.



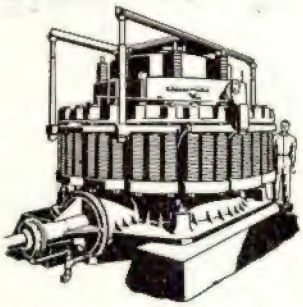
o Molibdenio...

E AS TRITURADORAS CÓNICAS

SYMONS

O desenho à esquerda mostra um corte transversal de um lingote de molibdénio (Foto cedida pela Climax Molybdenum Co.)

*o *Molibdenio, do grego «Molybdos» que significa chumbo, tem a sua principal fonte comercial na molibdenite mineral. Houve necessidade de desenvolver a produção de molibdénio para o fabrico de ligas de aço empregadas extensivamente nas indústrias aeronáutica, automóvel, da maquinaria pesada e muitas outras.*



TRITURADORAS CÓNICAS SYMONS... as máquinas que revolucionaram o processo da trituração... são construídas nos tipos «Standard», «Cabeça curta», e «intermediário» indo as cabeças trituradoras desde 22" a 7 pés de diâmetro. A capacidade é de 6 a 900 toneladas/hora.

A maior produtora de molibdénio no mundo é a Climax Molybdnum Company que fornece mais de 50 % da produção do mundo livre. Situada a grande altitude nas Montanhas Rochosas, no sector ocidental dos Estados Unidos, esta mina-modelo dos tempos modernos é presentemente a maior empresa de exploração mineira subterrânea da América do Norte. Na Climax, uma bateria de treze Trituradoras Cónicas Symons de 7 pés trabalham grandes tonelagens da rocha cristalina rija que contém o minério de molibdenite. Além disso, a Climax emprega uma Trituradora Primária Symons de 60" e 25 separadoras de vibrações Symons.

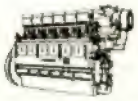
Isto porque na produção de molibdénio — *como em todas as grandes operações indústriais com minerais e minérios, no mundo inteiro*... as Trituradoras Cónicas Symons são as preferidas pelos grandes magnates da indústria para a produção de grandes quantidades de produto, finamente triturado, por baixo preço.

Trituradoras Giratórias Symons

Moinhos

Guindastes para minas

Separadoras Vibráteis Symons



Motores Nordberg

SYMONS... *marca registada* Nordberg conhecida no *mundo inteiro*

NORDBERG MFG. CO., Milwaukee, Wisconsin, U. S. A. • Endereço Telegráfico: NORDBERG

LONDRES: 19 Curzon St., W. 1
JOHANNESBURG: 42 Marshall St.
GENÊVE: 5 Rue Marc Monnier
MEXICO: D. F.: Dolores 3

Representada nas principais áreas comerciais do Mundo

XC257

C. D. U. 621.357.6 : 678.027.7

Moules electroformés.

Industrie des Plastiques Modernes, 2-956, vol. 8, n.º 2, pág. 13-15.

C. D. U. 621.364.15 : 681.112.7

Le chauffage haute fréquence appliqué au matriçage à chaud de boîtes de montres en laiton et en maillechort — *Margot, A. et G. Küchli.*

Rev. Brown Boveri, t. 43 (1956). n.º 5, pág. 169 a 171.

4 fig., 8 réf. bibliogr.

C. D. U. 621.396.615.141.2.002

Manufacture of a magnetion.

Electrical Communication, 1954, vol. 31, n.º 1, pág. 3-18.

C. D. U. 621.396.65 : 621.396.93.029.6

Verinheitlichte Überleitungseinrichtungen füs den beweglichen nicht postalischen UKW— Sprechfunk — *K. Bartels.*

S E G Nachrichten, 1955, vol. 3, n.º 4, pág. 165-168.

C. D. U. 621.396.93.029.6 : 621.396.65

Vereinheitlichte Uberleitungseinrichtungen füs den beweglichen nicht postalischen UKW — *K. Bartels.*

S E G Nachriehten, 1955, vol. 3, n.º 4, pág. 165-168.

C. D. U. 621.397 : 621.2

Bildröhren für Industriefernsehen — *K. H. J. Rottgardt and W. Berthold.*

S E G Nachrichten, 1956, vol. 4, n.º 1, pág. 11-13.

C. D. U. 621.882 + 621.884

Les limites de la transmission de force dans le rivetage et le boulonage en construction métallique.

Acier, 3-957, n.º 3, pág. 129.

C. D. U. 623.4

«Defence Against the ICBM» (Problemas teóricos e técnicos da defesa contra prejécteis inter-continentais) — *Dr. I. J. Billington and B. S. Lamb.*

«The Aeroplane», 26-10-956, vol. 91, n.º 2356, pág. 629.

Obs. A conclusão deste artigo encontra-se no n.º seguinte.

C. D. U. 624.012.4 : 539.374

Creep-effects in the analysis of reinforced concrete structures. (Efeitos da fluência no cálculo das estruturas de betão armado) — *A. M. Frendenthal (Nova Iorque).*

Publ. Preliminar da Ass. Internacional de Pontes e Estruturas, 1956, pág. 85-99.

Referências bibliográficas — Resumo em português.

C. D. U. 624.012 : 45

La rupture par flexion et par effort tranchant dans les pontres en beton armé — *Chamband.*

Annales de l'Institut Technique du Batiment, 2-957, n.º 110, pág. 168-202.

15 referências bibliográficas.

C. D. U. 624.01245 : 69.059.2

Fissuration des corps fragiles et du béton armé — *Brice, L. P.*

Annales de l'Institut Technique du Batimont, 1-957, n.º 109, pág. 81-92.

C. D. U. 624.012.47 : 691.87

Losses of cable force at prestessing (Redes de tensão nos cabos de uma estrutura em betão preesforçado) — *Allan Borgfelt (Gotemburgo).*

Publ. Preliminar da Ass. Internacional de Pontes e Estruturas, 1956, pág. 1023-1040.

Referências bibliográficas. Resumo em português.

C. D. U. 624.012.47.023.93 : 539.219.2

Cracks in prestessed concrete beams (Fissuração das vigas de betão preesforçado) — *P. W. Abelas (Londres).*

Publ. Preliminar da Ass. Internacional de Pontes e Estruturas, 1956, pág. 707-750.

Resumo em português.

C. D. U. 624.014

Structures in Steel ard light alloys — *John I. Porcel (St. Louis, Mo).*

Publ. Preliminar da Ass. Internacional de Pontes e Estruturas, 1956, pág. 599-605.

Relatório geral.

C. D. U. 624.014.004.4

Unterbalt von Stablkenstruktionen (Conservação das estruturas metálicas) — *A. von Aalst e G. P. Dolfhijn (kinderdijk e Leiden).*

Publ. Preliminar da Ass. Internacional de Pontes e Estrutnras, 1956, pág. 649-660.

Resumo em português.

C. D. U. 624.014.004.4

Maintarance of steel structures — *M. F. Palmer (Bromley).*

Publ. Preliminar da Ass. Internacional de Pontes e Estruturas, 1956, pág. 663-673.

Referências bibliográficas.

C. D. U. 624.025.059.1

The right treatment. Selecting méthods of. floor maintenance — *P. A. Howden.*

Building Materials — Floors, 9-956, vol. 16, n.º 9, pág. 73.

C. D. U. 624.025.334.21 : 693.570.722

An easily erected lightiweight floor.

Building Materials — Floors, 7-956, vol. 16, n.º 7, pág. 30.

C. D. U. 624.04.001.57

Estudo em modelos de problemas estruturais — *Euler Magalhães da Rocha.*

Revista do Clube de Engenharia, 2-957, n.º 246, pág. 21-26.

C. D. U. 624.058.5 : 539.383

Recherche théorique et expérimentale des surtensions, résultant de l'ovalisation, dans un tuyau sollicité sur deux génératrices opposées — *André Paduart.*

Acier Stahl Stell, 4-956, n.º 6, pág. 176.

C. D. U. 624.072.2 : 624.078

L'appui mutuel des poutres qui se croisent — *Robinson.*

Annales de l'Institut Technique du Batiment, 12-956, n.º 108, pág. 1159-1176.

C. D. U. 624.072.2 : 693.56

La poutre en béton armé a talon et l'adhérence des barres groupées por deux au contact — *Robinson, R.*

Annales de l'Institut Technique du Batiment, 12-956, n.º 108, pág. 1141-1157.

C. D. U. 624.014.6.001.57 : 621.315.66

Essais de pylônes supports de lignes électriques — *F. Hebrant.*

Acier Sthal, Steel, 11-956, n.º 11, pág. 461.

C. D. U. 624.078 : 624.0722

L'appui mutuel des poutres qui se croisent — *Robinson.*

Annales de l'Institut Tecnique du Batiment, 12-956, n.º 108, pág. 1159-1176.

C. D. U. 624.131 : 624.15

Étude des fondations en surface — *L'Herminier R.*

Annales de Institut Technique du Batiment, 1-957, n.º 109, pag. 93-102.

C. D. U. 624.131.4/6

Quelques recherches de mécanique du sol: succion, thermo-osmose, fondations superficielles — *Soeiro, F. Habib P. et Tcheng, V.*

Annales de Institut Technique du Batiment, 2-957, n.º 110, pág. 119-144.

C. D. U. 624.15 : 624.131

Étude des fondations en surface — *L'Herminier, R.*

Annales de Institut Techuique du Batiment, 1-957, n.º 109, pág. 93-102.

C. D. U. 624.154

Method of pole sinking in clay soil.

Building Materials, 3-956, vol. 14, n.º 3, pág. 103.

C. D. U. 624.154.3

Pile fondations for buildings — *R. J. Salter.*

Building Materials, 3-957, vol. 17, n.º 3, pág. 87.

C. D. U. 624.2/9

Solicitações das pontes e estruturas — *Barbosa Carmona e Correia de Araújo.*

Publ. Preliminar da Associação Internacional de Pontes e Estruturas, 1956, pág. 39-48.

Relatório geral.

C. D. U. 627.8

Montpezat

Houile Blanche, 9-10-955, n.º 4, pág. 543-554.

C. D. U. 627.82.012.47

Una presa de hormigón pretensado en Escocia.

Revista de Obras Públicas, 9-956, n.º 2899, pág. 600.

C. D. U. 627.82.059.25 (47)

La reconstruccion de una presa rusa sobre el Niéper — *Fritz Hartung.*

Informes de la Construcion, 2-956, n.º 78.

C. D. U. 628.14 : 678-462

Le transport de l'eau — *D. J. van Wijk.*

Industrie des Plastiques Modernes, 3-956, vol. 8, n.º 3, pág. 31-33.

C. D. U. 629.135.1

Motorless Flight in the Stratosphere

The Aeroplane, 9-11-956, vol. 91, n.º 2358, pág. 695.

C. D. U. 629.135.4

«Holland's First Helicopter»

The Aeroplane, 2-11-956, vol. 91, n.º 2357, pág. 660.

C. D. U. 654.03.003.3 : 621.395.2

Vollautomatische Gebührenabrechonung en Nebenstellenanlagem — *W. Loth.*

S. E. G. Nachriehten, 1956, vol. 4, n.º 1, pág. 419.

C. D. U. 656.61 (469)

A Renovação da Frota mercante portuguesa — *Mauricio J. da Silva.*

Revista do Club de Engenharía, 6-956, n.º 238, pág. 21-27

C. D. U. 657.47 : 625.7

L'étude économique des travaux routiers — *R. Coquand.*

La Technique Moderne de Construction, 9-956. vol. 11, pág. 327.

C. D. U. 666.6 : 666.982.4

Fabrication et utilisation des differents types d'elements de construction en terre cuit et béton précontraints, fabriqués en France — *Charraére, J.*

Annales de l'Institut Technique des Batiment, 12-956 n.º 108, pág. 1178-1197.

C. D. U. 666.81 (73)

Gypsum : Forgotten industry of Las Vegas — *Ray Day.*

Excavating Engineer, 5-956, pág. 30.

ESCAVADORAS

LINK-BELT

SPEEDER

CLAMSHELL K-360 (Capacidade 1 — 1/2 jd.³)

— **Modelos** Com baldes de 1/2 a 3 jardas cúbicas de capacidade.

— **Equipamentos frontais** «dragline»; balde de garras; guindaste; bate-estacas; valadora e colher escavadora frontal.

— **Comandos hidráulicos** Speed-o-Matic, patente da Link-Belt Speeder.

— **Montagens possíveis:**

LAGARTAS

CHASSIS SOBRE PNEUS

CAMIONS

REPRESENTANTES EXCLUSIVOS
PARA A METRÓPOLE E ULTRAMAR

ESTABELECIMENTOS HEROLD, L.DA

RUA DOS DOURADORES, 7

LISBOA

NA TERRA, NO MAR E NO AR
OS ROLAMENTOS FAG IMPÕEM-SE PELA
SUA ALTA QUALIDADE E PRECISÃO

FAG

KUGELFISCHER GEORG SCHÄFER & CO. SCHWEINFURT

SOCIEDADE COMERCIAL LUSO-COLUMBIA, LDA

PORTO · P. D. FILIPA DE LENCASTRE, 49 · TELEFONE. 25838/9-P.P.C. LISBOA · RUA DO TELHAL, 8-C · TELEFONE. 35620

CIMENTO TEJO

FÁBRICA EM ALHANDRA

Fábrica com quatro linhas de fabrico

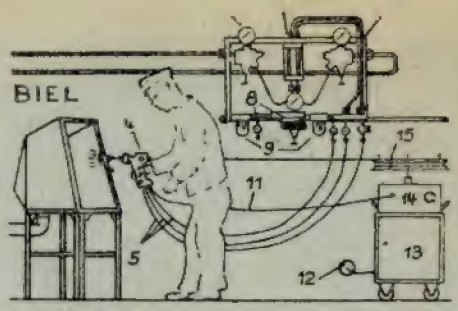
sendo uma delas das mais modernas da Europa

Para obras hidráulicas e de responsabilidade preferir o

CIMENTO TEJO

Companhia «Cimento Tejo»

Rua da Vitória, 88-2.º — Telef. 28953 — LISBOA



METALIZAÇÃO «BIEL»

Aparelhagem técnicamente perfeita

FABRICO ALEMÃO

Arames de aço e metais

PROJECTOS E ORÇAMENTOS GRÁTIS

DISTRIBUIDORES:

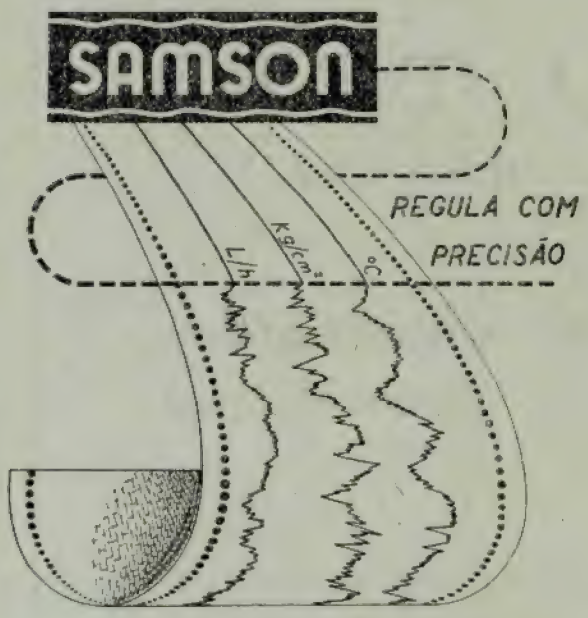
AGÊNCIA COMERCIAL, LDA.

LISBOA

Rua da Boa Vista, 76-1.º — Telef. 34759

SONDAGENS
FUNDAÇÕES
CAPTAÇÕES DE ÁGUA
REBAIXAMENTOS
DE NÍVEIS AQUÍFEROS

RUA RODRIGO DA FONSECA, 62-4.º D. · LISBOA · TELEF. 5 3873



TEMPERATURA, PRESSÃO E DÉBITOS
PARA VAPOR, ÁGUA, AR, ÓLEO E OUTROS FLUIDOS

BOUHON & IRMÃO, LTD.

EM LISBOA: Av. Júlio Diniz, 26, r/c Esq.
Telef.: 77 36 03, 77 86 85

NO PORTO: Rua Antero do Quental, 615
Telef. 4 0118 — 4 0119

GUTTATERNA

ESTANQUEIDADE ✦ PLASTICIDADE
ANTI-CORROSÃO

BARRAGEM DE BENI — BAHDEL (Argélia)
(revestimento completo do paramento de montante com Guttaterna)

PRINCIPAIS APLICAÇÕES EM PORTUGAL:
HIDRO-ELÉCTRICA DO CÁVADO — BARRAGEM DE PARADELA (juntas de dilatação)
HIDRO-ELÉCTRICA DO DOURO — BARRAGEM DE PICOTE (juntas de betonagem contracção e dilatação)

SCHROETER E ALMEIDA

SECÇÃO TÉCNICA

Rua da Madalena, 128-2.º **LISBOA**
Telef. 20649

TRACTORES VENDER

Modelo «Champion» de rasto contínuo com motor Diesel de 85 HP

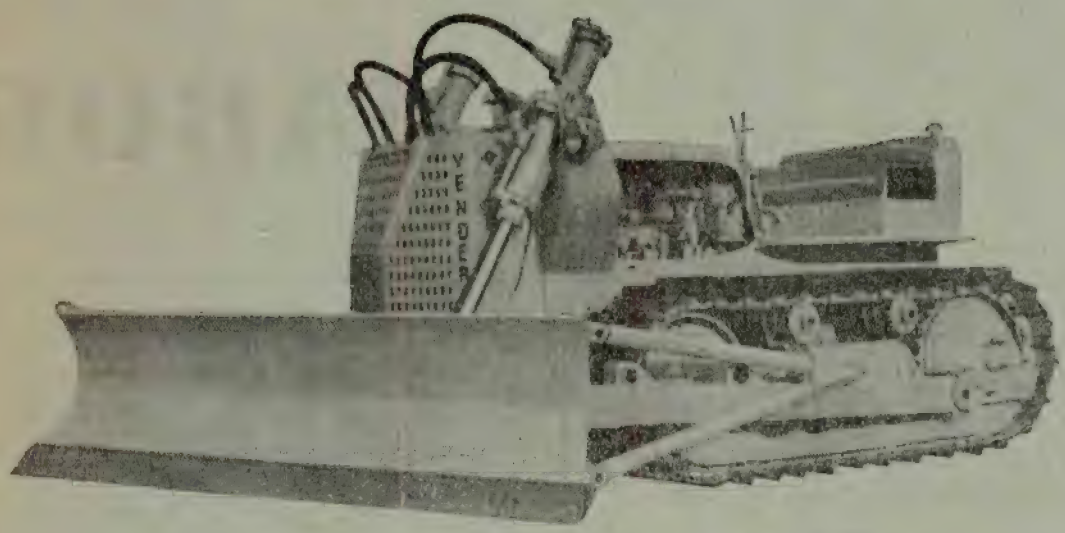
80 HP no tambor de transmissão
72 HP na barra de tracção

Modelo «Conqueror» de rasto contínuo com motor Diesel de 160 HP

140 HP no tambor de transmissão
120 HP na barra de tracção

Modelo «Bully» com motor Diesel de 50 HP (Tractor de rasto ràpidamente transformável em tractor de rodas ou vice-versa. Único tractor deste tipo no Mundo)

47 HP no tambor de transmissão
40 HP na barra de tracção



TRACTORES FIAT

DE RASTO CONTÍNUO

25 C — Motor Diesel de 25 HP
20 HP à barra — 24 HP no tambor

OM 35/40 C — Motor Diesel de 37 HP
29 HP à barra — 35 HP no tambor

55 e 55 L — Motor Diesel de 55 HP
44 HP à barra — 50 HP no tambor

DE RODAS

25 R — Motor Diesel de 25 HP
20 HP à barra — 24 HP no tambor

OM 35/40 R — Motor Diesel de 37 HP
29 HP à barra — 35 HP no tambor

55 R — Motor Diesel de 55 HP
45 HP à barra — 50 HP no tambor

DISTRIBUIDORES EXCLUSIVOS

MONTEIRO GOMES, LIMITADA

RUA CASCAIS, 47 — LISBOA

Telefs. 63 70 83/4/5

BEJA — ÉVORA — PORTO — SANTARÉM — VILA FRANCA DE XIRA — LUANDA (ANGOLA)
LOURENÇO MARQUES (MOÇAMBIQUE)

SONDAGENS RÓDIO, L.DA

LISBOA

RUA S. MAMEDE AO CALDAS, 22, 3.º

Telefones: 2 8685 - 2 6865 ✦ Telegramas: SETANSOL

RÓDIO

SONDAGENS GEOLÓGICAS
ESTUDOS GEOTÉCNICOS
ESTACAS GUNITA
CAPTAÇÃO DE ÁGUAS
CONGELAÇÃO DO TERRENO
IMPERMEABILIZAÇÃO DE OBRAS HIDRÁULICAS
CONSOLIDAÇÃO DE FUNDAÇÕES
ABAIXAMENTO DO LENÇOL DE ÁGUA

—//—

Sócio gerente: **Walter Weyermann**–Eng. civil

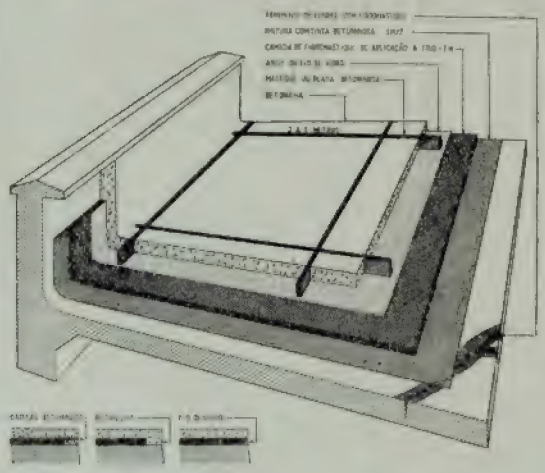
PNEUS PARA TODOS OS VEICULOS AUTOMOVEIS LIGEIROS E PESADOS

PNEUS PARA OS MAIS DIVERSOS SERVIÇOS CIVIS E MILITARES

MABOR

TODOS OS MATERIAIS PARA
IMPERMEABILIZAÇÃO
PRODUZIDOS PELO MESMO
FABRICANTE

Placas Betuminosas, Fibromastiques, Tintas Betuminosas, Mastiques, Emulsões, Colas, Cartões Betuminosos e Papéis Asfaltados



GUEDES & SANTOS SILVA, LDA.

R. de Pedrouços, 49 ● Tel. 61 13 16 ● LISBOA

- SISTEMAS TELEFÓNICOS DE TODOS OS TIPOS
- SISTEMAS DE SINALIZAÇAO
- SISTEMAS DE SONORIZAÇÃO
- APARELHAGEM DE MEDIDA E ENSAIO
- CONTADORES ELÉCTRICOS
- CABOS E APARELHAGEM TELEFÓNICA E ELÉCTRICA

PROJECTOS
MONTAGENS
REPARAÇÕES
ASSISTÊNCIA TÉCNICA

Sociedade Ericsson de Portugal, L.da

R. Filipe Folque, 7, 1.º Tel. (P P C 2 linhas) 57193

Sociedade de Pesquisas, Captações de Água e Transportes, L.da

MATERIAL ELÉCTRICO

para instalações de alta e baixa tensão

•

ESPECIALIDADES **GARDY:**

Corta-circuitos e cartuchos de alto poder de corte
Disjuntores para força motriz e iluminação
Disjuntores de calibres variáveis
Disjuntores MINIHUILLE, até 35 kV
Dispositivos de corte em carga para seccionadores, etc.

REPRESENTANTE:

ANTÓNIO BARÓ

Rua da Assunção, 99-2.º-Dt.º

LISBOA

Para impermeabilizar terraços, paredes, fundações, etc.

COLAGEM DE TACOS DE MADEIRA

FABRICA EM SACAVÉM

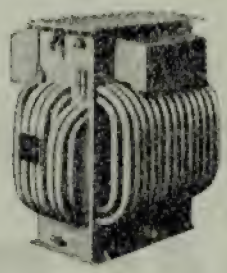
TELEF. { 73 01 56 (4 linhas)

TELEG. EPALDA—LISBOA

'ENGLISH ELECTRIC'

Postos de soldadura mono e multi-operador

Os postos de soldadura a arco «English Electric», mono e multi-operador, são hoje largamente utilizados nos estaleiros navais do estrangeiro e também em estaleiros navais e montagem de centrais hidro-eléctricas em Portugal. O «City of Brisbane» navio misto de 12 500 T que se vê na fotografia junta, foi uma das unidades construídas em Inglaterra pelo processo de soldadura eléctrica com postos multi-operador



Representantes exclusivos para Portugal e África Ocidental Portuguesa:

Monteiro Gomes, Limitada

R. Cascais, 47 (Alcântara) — Tel. 637083 — 3 linhas
LISBOA

SUCURSAIS:

PORTO * BEJA * VILA FRANCA DE XIRA

e

LUANDA

Fábrica Portugal

S. A. R. L.

LISBOA

MOBILIÁRIO METÁLICO

EM TODOS OS GÉNEROS

Instalações completas para :

Mobiliário moderno
para
ESCRITÓRIOS
ESCOLAS
BIBLIOTECAS

CLÍNICAS
HOSPITAIS
SANATÓRIOS
CINEMAS
HOTÉIS
ESPLANADAS

SALAS DE EXPOSIÇÕES :

Rua Febo Moniz, 2 a 20 — Praça dos Restauradores, 49 a 57

Avenidas da República e Elias Garcia — Rua da Graça, 82 e 84

MANIL

EXPORTAÇÃO · IMPORTAÇÃO

Sede: **Paço d'Arcos** – Av. Voluntários da República – Tel. 262 P. A.

CONSTRUÇÃO CIVIL

SERRAÇÃO E CARPINTARIAS MECÂNICAS
MADEIRAS E TACOS TRATADOS

Depósitos: CASCAIS — ESTORIL
PAÇO D'ARCOS — PAREDE

As oficinas estão apetrechadas com os maquinismos mais modernos e com estufa para secagem e tratamento de madeiras

TABELAS
PARA O CÁLCULO DE
BETÃO ARMADO

Pelo Eng.º Fernando Vasco Costa

revistas e actualizadas pelo

Eng.º João d'Arga e Lima

PREÇO 120$00

Desconto de 10 % para Assinantes

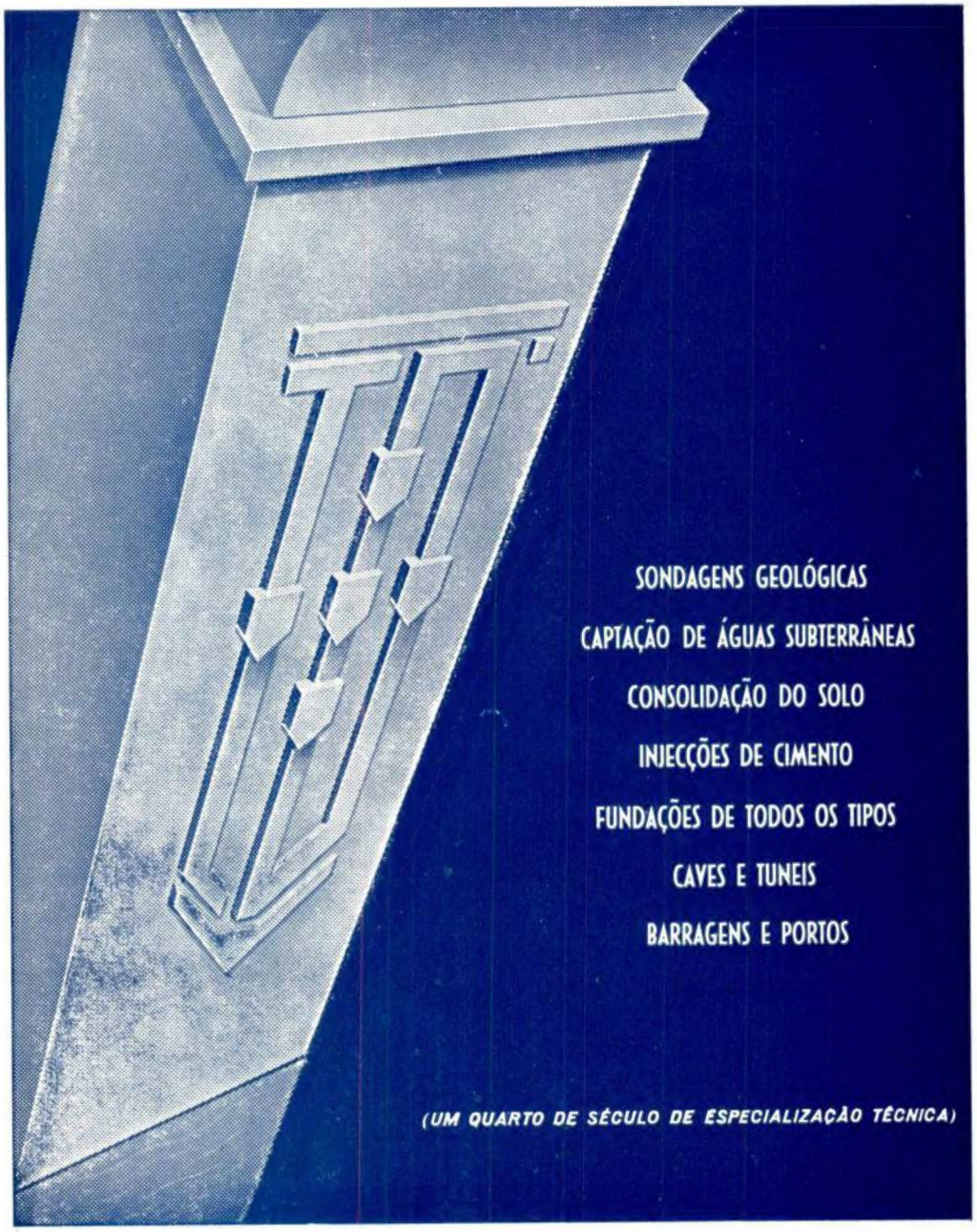
Pedidos à «TÉCNICA»

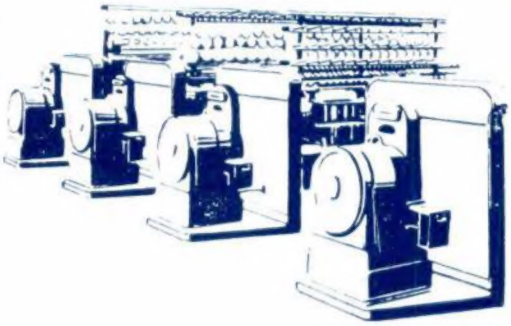
Empresa de Sondagens e Fundações

TEIXEIRA DUARTE, L.DA

PR. DA FIGUEIRA, 18. 3.°
TELEF. 3 2774

LISBOA





Soc. de Elect. BROWN BOVERI, LDA

Rua de Sá da Bandeira, 481-2.º
(Palácio do Comércio)

Telefone 23411

PORTO

Fornece as afamadas máquinas e aparelhos de construção suíça

BROWN BOVERI

Comandos eléctricos especiais para as indústrias de fiação e tecelagem.

Comandos eléctricos para as tinturarias e estamparias.

Comandos eléctricos para as fábricas de acabamentos.

Electrificação de fábricas de moagem, de cimento, de sabão, de cerveja, de produtos químicos, de adubos, etc., etc.

— Soldadura eléctrica —

Instalação de emissoras de rádiodifusão.

Válvulas electrónicas avulsas para aparelhos industriais ou de medicina, sempre em armazém no Porto.

— CENTRAIS ELÉCTRICAS —